

Universitat Politècnica de Catalunya

Grado en Matemáticas e Ingeniería Física

Trabajo final de grado

Superficies nulas y agujeros negros

Antonio Mancebo Sevilla

Supervisado por Juan Margalef y Robert Cardona

Octubre 2019

Dar las gracias a Juan Margalef, a Robert Cardona y a Eva Miranda, pues sin su ayuda no hubiese sido posible hacer este proyecto.

Abstract

En este proyecto hemos estudiado un tipo muy importante de subvariedad dentro de la geometría lorentziana: las subvariedades nulas. Esta clase de subvariedades es el objeto matemático que permite el estudio de objetos físicos de gran importancia, como los agujeros negros o los horizontes de Killing. El presente trabajo está dividido en tres partes principales. Primero, estudiamos todas las herramientas de las Matemáticas y la Física que necesitaremos para trabajar con las subvariedades nulas en el espacio-tiempo. Para ello, exponemos definiciones y resultados propios de la Geometría diferencial que nos permiten establecer el ambiente de trabajo: la geometría lorentziana. Además, estudiamos brevemente los postulados de la Relatividad especial para ser capaces de entender la necesidad de su generalización: la Relatividad General. Una vez establecidas las herramientas necesarias de la Relatividad General, como son el espacio-tiempo y la causalidad, pasamos a estudiar las subvariedades nulas. En este capítulo hacemos un análisis sobre este tipo de subvariedades, en especial de las hipersuperficies nulas, viendo propiedades importantes y mostrando algunos ejemplos de ellas. Por último, tras haber revisado todas las herramientas necesarias, estudiamos los agujeros negros. Para ello, vemos la definición formal y estudiamos diferentes métricas relevantes que representan este tipo de objetos físicos.

Keywords

Geometría diferencial, Relatividad General, Subvariedad nula, Causalidad, Agujero negro, Schwarzschild

Código de clasificación de la American Mathematical Society (AMS): 53Z05

Índice

1. Introducción	3
1.1. Motivación del trabajo	3
1.2. Visión general del estudio	5
1.3. Objetivos	8
2. Herramientas Matemáticas: Geometría diferencial	9
2.1. Introducción: Notación indexada	9
2.2. Variedades diferenciables	9
2.3. Fibrado vectorial	18
2.4. Geometría (semi-)Riemanniana	48
3. Repaso de Física: fundamentos de Relatividad Especial y Relatividad General	60
3.1. Fundamentos de Relatividad Especial: el espacio-tiempo de Minkowski	60
3.2. Fundamentos de Relatividad General. El principio de equivalencia	62
3.3. Causalidad en el espacio-tiempo	63
3.4. Ecuaciones de la Relatividad General	71
4. Subvariedades nulas en el espacio-tiempo	74
4.1. Definiciones y propiedades básicas	74
4.2. Generadores y geodésicas nulas	77
4.3. Reparametrización geodésica y separación causal	83
4.4. Killing horizons	85
5. Agujeros negros y superficies atrapadas	88
5.1. Compactificación conforme: diagrama de Penrose	89
5.2. Métricas esféricamente simétricas. La métrica de Schwarzschild	94
5.3. No hair theorem: la solución de Kerr-Newman	107
5.4. Superficies atrapadas	114
6. Conclusión	116

1. Introducción

1.1 Motivación del trabajo

Tras la reciente imagen de este año del agujero negro supermasivo del centro de M87, una galaxia a 55 millones de años luz de la Tierra que permitió confirmar lo predicho por las ecuaciones de Einstein, la teoría de la Relatividad General se encuentra entre el *state-of-the-art* en investigación científica. De hecho, tomar una imagen como la de este año marca el comienzo de una nueva era en la astrofísica en la que se comprobará de forma muy exquisita la validez de las ecuaciones de Einstein para la gravedad. Así, la Relatividad General se convierte en un campo experimental y no solo teórico.

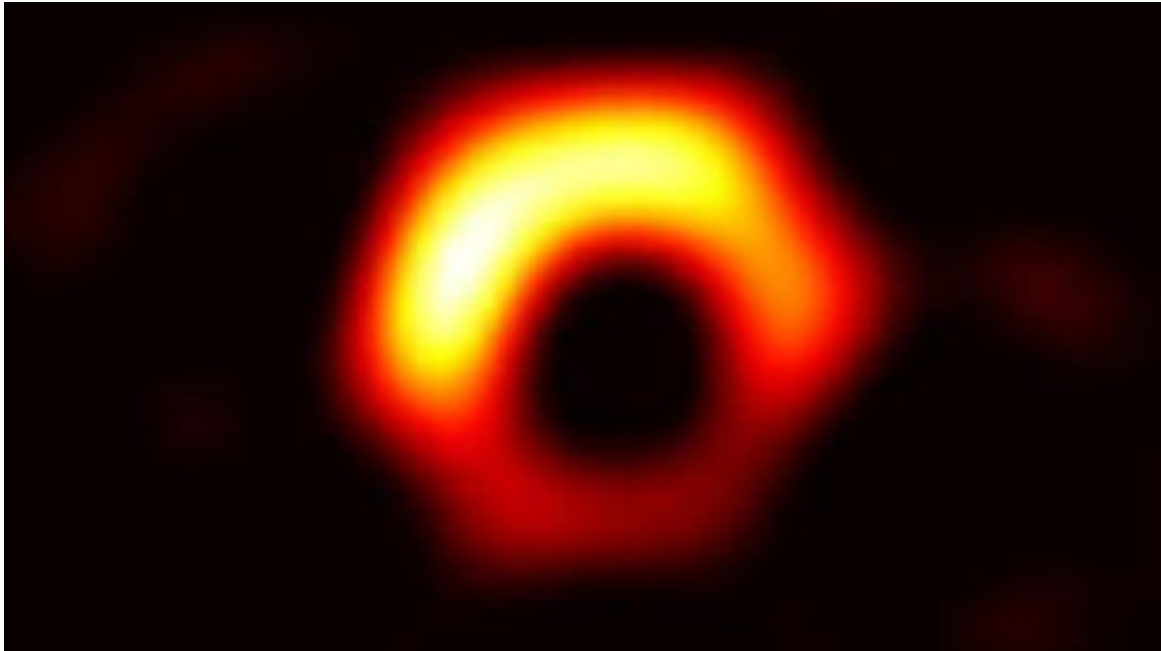


Figura 1: Primera imagen de la historia de un agujero negro [Fuente: [31]]

Es importante recordar que los agujeros negros son capaces de atrapar no solo la luz, sino también la materia y el propio espacio-tiempo en su interior. Por tanto, los agujeros negros en sí mismos son objetos completamente negros y carentes de rasgo alguno, así que hasta ahora solo se han “captado” por los inmensos efectos que provocan a su alrededor y la enorme energía que desprenden. No veremos nada dentro de la “negrura”, sino que lo que observamos es la huella de la energía liberada por el gas supercaliente que gira en su entorno y la radiación que emiten. Esta “sombra” luminosa es lo que nos dará información sobre cómo se dobla el espacio-tiempo en las proximidades del agujero negro. Tales son los avances, que recientemente la NASA ha publicado una espectacular simulación que muestra cómo un agujero negro deforma el espacio-tiempo:

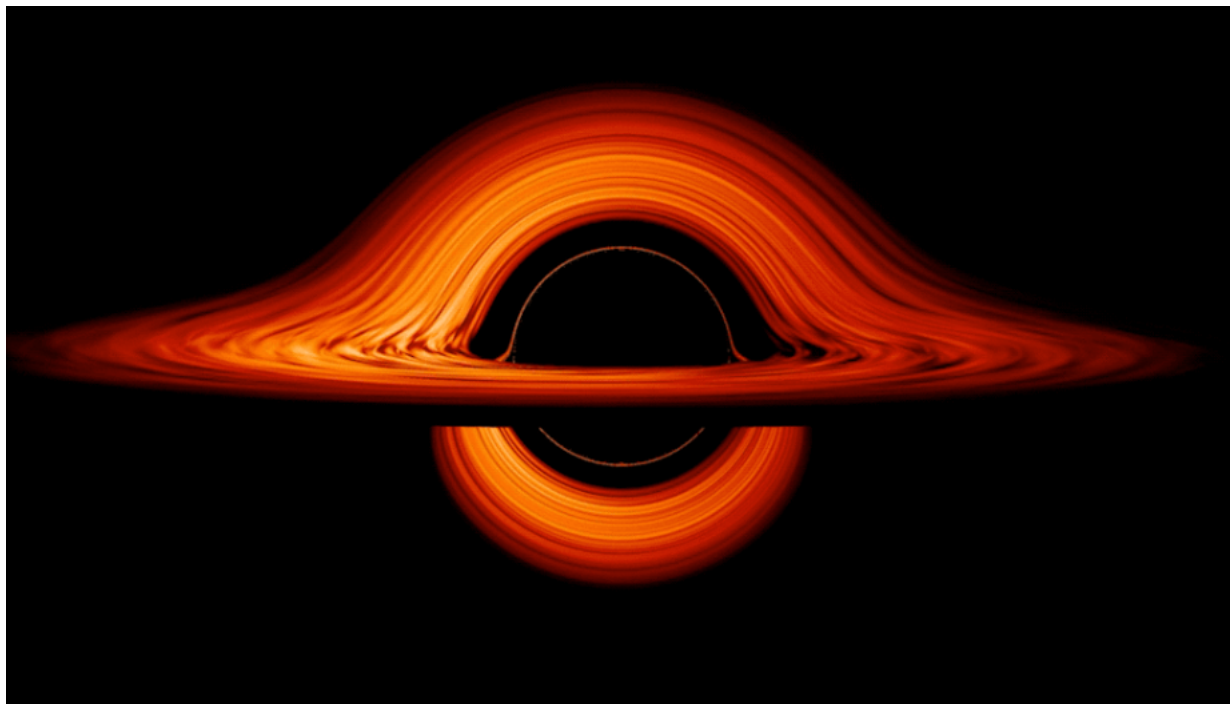


Figura 2: Simulación de la NASA mostrando cómo un agujero negro deforma el espacio [Fuente: [31]]

Los agujeros negros se distinguen por un campo gravitacional tan fuerte que nada, ni siquiera la luz, consigue escapar de ellos. La espectacular visualización realizada por la NASA ilustra cómo la brutal gravedad de estos pozos cósmicos deforma su entorno. Justo después está el horizonte de sucesos. Pero no podemos esperar ver ninguna luz a la que podamos señalar, pues se trata de una frontera imaginaria. De hecho, si pudiésemos atravesar el *horizonte de sucesos*, no notaríamos ningún cambio, ya que no es una superficie natural, sino el punto de “no retorno” del agujero. Pasando el *horizonte de sucesos* solo puede ocurrir una cosa: que sigamos cayendo hacia el interior del agujero, sin posibilidad de dar marcha atrás.

El horizonte de sucesos de un agujero negro está vinculado a la velocidad de escape del objeto, la velocidad que esa persona hipotética que se adentra en el agujero negro tendría que superar para escapar de la atracción gravitacional del monstruo cósmico. Cuanto más se acercara alguien a un agujero negro, mayor sería la velocidad que necesitarían para escapar de esa gravedad masiva. El horizonte de sucesos es el umbral alrededor del agujero negro donde la velocidad de escape supera la velocidad de la luz.

Según la teoría de la Relatividad Especial de Einstein, nada puede viajar más rápido a través del espacio que la velocidad de la luz. Esto significa que el horizonte de eventos de un agujero negro es esencialmente el punto desde el cual nada puede regresar. Dentro del horizonte de sucesos, se encontraríamos la *singularidad* del agujero negro, que es el lugar donde la teoría afirma que toda la masa del objeto se ha colapsado en una extensión infinitamente densa. Esto significa que el tejido del espacio-tiempo en torno a la singularidad también se ha curvado en

un grado infinito, por lo que las leyes de la física tal y como las conocemos actualmente se rompen.

Hasta ahora, sin embargo, la tecnología no ha sido capaz de detectar directamente el horizonte de sucesos de ningún agujero negro. Solo se ha podido observar la materia que se arremolina en su entorno y que gira a grandes velocidades, o bien detectar los estallidos de radiación que emiten cuando algo es engullido por estas masas.

A pesar de ello, los científicos han trabajado duro para intentar confirmar la teoría de la Relatividad de Einstein. De hecho, gracias a los datos del seguimiento efectuado durante 26 años sobre la estrella S2, en las inmediaciones de Sagitario A*, el agujero negro supermasivo que vive en el centro de nuestra galaxia, los científicos han podido demostrar que en su punto de máximo acercamiento, la estrella sufre una pérdida de energía. La teoría de la Relatividad General de Einstein predice que los fotones deberían sufrir una pérdida de energía, lo que se conoce como *desplazamiento al rojo gravitatorio*. Eso es lo que ha conseguido medir el equipo científico del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), confirmando este resultado de la teoría de Einstein.

Los científicos no estaban muy seguros de que la teoría de Einstein funcionara igual de bien en los ambientes más extremos de las galaxias, como los entornos de los agujeros negros supermasivos. Sin embargo, como podemos ver, las recientes observaciones, el descubrimiento de las ondas gravitacionales en 2017 y la imagen del primer agujero negro de este mismo año, la teoría de la Relatividad General de Einstein se resiste a todas las experiencias que la ponen a prueba.

1.2 Visión general del estudio

En 1905, Albert Einstein propuso su *teoría de la Relatividad Especial*. Esta teoría conciliaba la física de los cuerpos en movimiento, desarrollada por Galileo Galilei y Newton, con las leyes de la radiación electromagnética, obtenidas por Maxwell. Su principal postulado afirma que la velocidad de la luz es siempre la misma, independientemente del observador. Así, la Relatividad Especial permite que el espacio y el tiempo se entrelacen en un grado nunca antes imaginado.

A partir de 1907, Einstein comenzó a trabajar para ampliar la teoría de la Relatividad Especial para incluir la gravedad, o lo que llegó a ver que era equivalente, sistemas acelerados. En 1915, tras 10 años de trabajo, el físico alemán Albert Einstein publicó su famosa teoría de la Teoría de la Relatividad en la que mostró que el espacio y el tiempo no eran dos entidades diferenciadas, sino que formaban en realidad una entidad única: el espacio-tiempo. Una especie de tejido en el que se desarrollan todos los eventos físicos del universo y que además es maleable, ya que se curva en presencia de la materia. Esta idea de cómo la distribución de masa-energía deforma la curvatura del espacio-tiempo viene recogida en las ecuaciones de Einstein.

Como ocurre con toda teoría de la Física, es esencial definir y estudiar las herramientas de las Matemáticas que permitirán modelizar nuestra realidad física. En este caso, la rama de las

Matemáticas que permitiría desarrollar toda la teoría de la Relatividad General es la Geometría diferencial. La Geometría diferencial es el estudio de la geometría usando las herramientas del Análisis matemático y del Álgebra multilineal. Los objetos de estudio de este campo son las variedades diferenciables, sobre las que se pueden realizar construcciones técnicas muy útiles como son los fibrados vectoriales, las derivadas (*de Lie, interior, exterior, ...*) o la conexión, que serán el objeto de estudio del capítulo 2. Sin embargo, estos objetos no son suficiente para poder modelizar el espacio-tiempo del que hablaba Einstein. Es necesario añadir otra herramienta que enriquezca esta estructura matemática y nos permita modelizar la curvatura producida por la materia: la métrica.

Las métricas con las que hemos trabajado hasta ahora son *métricas riemannianas*. La geometría de Riemann es el estudio de las variedades diferenciales con métricas de Riemann, es decir, una aplicación que a cada punto de la variedad le asigna una forma cuadrática definida positiva en su espacio tangente. Gracias a esta herramienta es posible definir propiedades métricas que nos permiten estudiar las propiedades de las variedades, como la distancia, el ángulo, etc. y definir nuevas herramientas como el tensor de Ricci, el escalar de curvatura, las geodésicas, ... Este tipo de métrica, al ser positiva definida, trata todas las direcciones de la variedad de la misma forma. Sin embargo, en el espacio-tiempo contamos con una dirección con propiedades especiales: el tiempo. Por lo tanto, necesitamos considerar una herramienta que nos permita distinguir una dirección del espacio-tiempo: la *métrica semi-riemanniana*.

Una métrica semi-riemanniana tiene la particularidad de no ser necesariamente positiva definida, sino que simplemente es no-degenerada. En concreto, las métricas semi-riemannianas que permiten distinguir una única dirección se conocen como métricas lorentzianas. De esta forma, podríamos modelar el espacio-tiempo definido por Einstein como una variedad 4-dimensional dotada de una variedad lorentziana, tal y como vemos en el capítulo 3.

Una de las principales características que diferencian a la geometría lorentziana de la geometría riemanniana es la existencia de lo que llamaremos *subvariedades nulas*. La clave para el estudio de este tipo de subvariedades es el hecho de que una subvariedad inmersa en una variedad lorentziana, en general, no herederará la estructura métrica de su espacio ambiente. Al eliminar la restricción de no-negatividad de la métrica, la herencia de la métrica lorentziana en la subvariedad puede producir degeneración. Cuando la restricción de la métrica sobre una variedad es degenerada decimos que la subvariedad es nula. En este caso, resulta imposible definir construcciones geométricas necesarias para trabajar con el espacio-tiempo. La gravedad de la situación es tal que las ecuaciones de Einstein no están bien definidas, pues al ser la métrica degenerada es imposible calcular su inversa y, consecuentemente, también el escalar de curvatura, implicado en las ecuaciones de Einstein.

Por tanto, nos encontramos con la imposibilidad de estudiar las subvariedades nulas con las herramientas de las que disponemos. Podríamos pensar que no es necesario estudiar este tipo tan singular de subvariedades ya que no presenta interés físico. Sin embargo, conceptos relevantes de la física de la Relatividad General encuentran realización matemática en subvariedades nulas del espacio-tiempo. Por ejemplo, las partículas en caída libre están modeladas por geodésicas

nulas y los horizontes de sucesos de agujeros negros por hipersuperficies nulas. Otros objetos relacionados con la causalidad del espacio-tiempo, como son los horizontes de Cauchy o los Killing horizons también pueden contener porciones nulas.

El estudio de las subvariedades nulas en la teoría de la Relatividad General es, entonces, algo crucial. A pesar de la gran importancia de la geometría nula, no fue hasta mediados de los años 80 que se formalizó su estudio por parte de la comunidad matemática. En particular, el estudio de superficies espaciales dentro de subvariedades nulas ha sido de gran importancia, pues modela la superficie de un agujero negro dentro de su horizonte de sucesos. Hasta la fecha, existe una gran cantidad de investigación dedicada al estudio de la geometría de variedades semi-riemannianas con la intención de relacionarla estrechamente con sus análogos riemannianos. En esta línea, Kupeli desarrolla en su artículo [17] la geometría intrínseca de las subvariedades nulas, prestando especial atención a las curvas nulas y las hipersuperficies. Usando la construcción matemática de paso al cociente, Kupeli muestra cómo es posible lidiar con la singularidad y ser capaces de estudiar la subvariedad nula como si de una subvariedad riemanniana se tratase. Alternativamente, Bejancu y Duggal [3] desarrollaron un método extrínseco que permite estudiar hipersuperficies nulas inmersas en una variedad semi-riemanniana. Este análisis, basado en la construcción de un fibrado vectorial nulo transversal, permite encontrar lo que se conoce como *screen distribution* para ser capaces de estudiar superficies espaciales inmersas en hipersuperficies nulas.

El estudio de las *screen distributions* presenta una arbitrariedad propia de la física. En nuestro trabajo, hemos querido toda arbitrariedad, por lo que hemos desarrollado el enfoque de Kupeli, tal y como veremos en el capítulo 4, pues se trata de un método riguroso y nada arbitrario que permite dar una solución elegante al problema. En este desarrollo, vemos que toda hipersuperficie nula es una subvariedad geodésica nula. De esta forma, es posible pasar al cociente y construir una subvariedad riemanniana que nos permita poner solución al problema de la degeneración de la métrica. De hecho, veremos que las hipersuperficies nulas no son más que un ejemplo particular que verifica unas propiedades generales que son necesarias para poder realizar dicha construcción de paso al cociente. Aparte de estudiar el análisis realizado por Kupeli, mostraremos ejemplos relevantes de cálculo de ciertas subvariedades importantes en el desarrollo del estudio. Además, haremos un análisis de un ejemplo muy importante de subvariedad nula: los *horizontes de Killing*.

Una vez analizado y resuelto el problema de la degeneración de la métrica para las subvariedades nulas, disponemos de todas las herramientas necesarias para poder comenzar el análisis de un objeto central en la teoría de la Relatividad General: los agujeros negros. Estos objetos salen de forma natural al estudiar soluciones de las ecuaciones de Einstein. Las ecuaciones de Einstein nos permiten relacionar la distribución de masa y la curvatura de la métrica. Son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales complicado, por lo que en el capítulo 5 nos centramos en las soluciones analíticas esféricas. Del análisis de las singularidades de las soluciones a las ecuaciones de Einstein, aparece la noción de agujero negro. Veremos que una característica que nos permite definir la presencia de una singularidad en el espacio-tiempo es el hecho de tener geodésicas que se acaban en un intervalo finito de tiempo. Por el contrario, en la región donde

no haya singularidad, la geodésica puede ser extendida al infinito.

Para ser capaces de entender el “infinito” así poder conocer la causalidad de todo el espacio-tiempo de nuestra solución a las ecuaciones de Einstein necesitaremos introducir los *diagramas de Penrose-Carter*. Estos diagramas nos permiten obtener una representación acotada de nuestro espacio-tiempo, acercando el infinito. Este diagrama será muy útil ya que representará la causalidad de nuestro espacio-tiempo.

Una de las soluciones más importantes es la solución de *Schwarzschild*, que permite describir el campo generado una masa esférica. Realizando los cambios de coordenadas necesarios, hasta obtener las que se conocen como *coordenadas de Kruskal-Szekeres*, es posible estudiar toda la causalidad del espacio-tiempo. De esta forma, se puede identificar la singularidad y estudiar tanto el agujero negro como el horizonte de sucesos. Sin embargo, aunque esta solución es muy útil ya que muestra muchas características generales de los agujeros negros y la causalidad del espacio-tiempo que los rodea, no es una solución realista para un agujero negro. El motivo de esta idea es el “*No hair theorem*”, que permite caracterizar a un agujero negro simplemente por tres magnitudes físicas: la masa, M ; la carga, Q ; y su momento angular, J . Por lo tanto, es necesario estudiar un agujero negro caracterizado por estas tres magnitudes, que se conoce como *agujero negro de Kerr-Newman*. Esta solución, al añadir el momento angular, representa un agujero negro mucho más realista que rota en torno a un eje al dirigirse hacia el colapso gravitacional.

En todo el desarrollo de los agujeros negros, usamos el diagrama de Penrose-Carter para estudiar la causalidad, que supone que es posible obtener una compactificación del espacio-tiempo cuya frontera representa el infinito. Por lo tanto, en todo momento estamos suponiendo que la subvariedad tiene frontera. Por eso, al final del capítulo damos una definición alternativa para el agujero negro. La idea es que seremos capaces de detectar si existe un agujero negro en el espacio-tiempo, no por la existencia de un horizonte de sucesos, sino de lo que se conoce como *superficie atrapada*. Una superficie atrapada en el espacio-tiempo es un tipo de superficie en el que la métrica heredada sufre una contracción.

1.3 Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es conocer cómo trabajar con las subvariedades nulas, pudiendo solucionar la degeneración causada por la métrica, para así ser capaces de estudiar los agujeros negros.

Otros objetivos implícitos en el desarrollo del trabajo es un estudio profundo de las herramientas matemáticas necesarias para la Relatividad General, así como una buena comprensión de esta teoría.

2. Herramientas Matemáticas: Geometría diferencial

2.1 Introducción: Notación indexada

Como todo buen físico, para poder trabajar con los modelos de la realidad es necesario saber trabajar con las herramientas matemáticas necesarias. En nuestro caso, la teoría de la Relatividad General de Einstein se nutre de la Geometría diferencial, por lo que es conocida como la teoría geométrica de la gravitación. Por este motivo, el principal objetivo de este capítulo será mostrar todas las herramientas matemáticas que nos serán necesarias para poder trabajar con la física de la Relatividad General, para así poder comprender cómo trabajar con las superficies nulas.

Durante todo el desarrollo del trabajo usaremos la **notación indexada** para trabajar de forma más fácil y compacta con tensores. Esta notación, introducida por *Roger Penrose*, es una notación matemática para tensores que aprovecha el uso de los índices para así indicar de qué tipo es el tensor. De esta forma, los índices pasan a ser únicamente marcadores y no están relacionados con la representación del vector en una base determinada. A modo de ejemplo, si consideramos un espacio vectorial, E , y su espacio dual correspondiente, E^* , podemos considerar el producto tensorial $E \otimes E \otimes E^* \otimes E \otimes E^*$, cuya representación en notación indexada sería E_{ce}^{abd} . Cada letra latina indica un elemento del producto tensorial por orden alfabético, de forma que si es un superíndice se trata de un factor contravariante, E , y si aparece como subíndice es un factor covariante, E^* .

En esta primera parte, a modo de marco teórico, hemos extraído las definiciones y conceptos más importantes basándonos en las referencias [1],[15],[18] y [20] a las que se puede acudir si se necesita mayor extensión.

2.2 Variedades diferenciables

Para empezar, debemos definir la herramienta con la que trabajaremos y sobre la que desarrollaremos nuestro estudio. La idea es introducir un objeto matemático que nos permita generalizar la idea de variedad en el espacio vectorial \mathbb{R}^n y que permita extender las nociones del cálculo diferencial. Para ello, trabajaremos con una serie de definiciones que nos permitirán definir lo que llamaremos *variedad diferencial o diferenciable*. En nuestra definición, partiremos de un espacio topológico M , aunque también podría hacerse partiendo de un conjunto o una variedad topológica.

Para ello, en primer lugar, analizaremos y veremos ejemplos de lo que se conoce como *atlas*.

Definición 2.2.1. Sea M un espacio topológico de dimensión n . Diremos que una **carta** (o

carta local) de dimensión n y de clase r es un par (U, ϕ) donde $U \subset M$ es un subconjunto abierto y la aplicación $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de clase \mathcal{C}^r entre U y un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Dado un espacio topológico M , es posible tener más de una *carta* con diferentes abiertos de M . Por lo tanto, necesitamos poder establecer una relación entre cartas diferentes de un mismo espacio topológico M . En particular:

Definición 2.2.2. Sea M un espacio topológico de dimensión n . Dadas dos cartas cualesquiera (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) sobre M tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, definimos la **aplicación de cambio de coordenadas** como $\phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$, donde $\phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$ es la restricción de la aplicación ϕ_α^{-1} al conjunto $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Además, si imponemos que el conjunto $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sea abierto y la aplicación $\phi_{\beta\alpha}$ sea un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^r , diremos que las cartas son **\mathcal{C}^r compatibles**.

En la mayoría de los casos, una sola *carta local* no permite enviar todos los puntos de nuestro espacio M a abiertos de \mathbb{R}^n . Por este motivo, es necesario usar más de una *carta local* que nos permita recubrir todo nuestro espacio topológico. Este hecho nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.2.3. Sea M un espacio topológico de dimensión n . Un **atlas** n -dimensional de clase r sobre M es un conjunto de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ n -dimensionales tal que sus dominios recubren completamente a M y dos cartas cualesquiera son \mathcal{C}^r compatibles, es decir:

1. $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.
2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, la aplicación de cambio de coordenadas $\phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_1}^{-1}$ es de clase \mathcal{C}^r .

De la misma forma que establecimos relación entre diferentes cartas, es posible relacionar atlas diferentes.

Definición 2.2.4. Sea M un espacio topológico sobre el que tenemos definido dos atlas \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 ambos de clase \mathcal{C}^r . Diremos que los atlas son **\mathcal{C}^r -equivalentes** si el atlas $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, formado por la unión de todas las cartas de ambos atlas, es de clase \mathcal{C}^r .

Esta forma de relacionar diferentes atlas de un mismo espacio topológico nos será de gran importancia, pues nos permitirá clasificar todos los atlas del espacio. De hecho:

Proposición 2.2.5. Sea M un espacio topológico y sea Φ el conjunto de los atlas de clase \mathcal{C}^r . Dados dos atlas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ cualesquiera, la relación \mathcal{A}_1 es \mathcal{C}^r -equivalente a \mathcal{A}_2 es una relación de equivalencia para el conjunto Φ .

Esta relación de equivalencia nos permite definir la *estructura diferenciable* de un espacio topológico.

Definición 2.2.6. Sea M un espacio topológico. Una **estructura diferenciable de orden \mathcal{C}^r** sobre M , \mathcal{D} , es una clase de equivalencia sobre el conjunto de atlas de M . La unión de todos los atlas dentro de una misma estructura diferenciable, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \bigcup \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathcal{D}\}$, se define como **atlas maximal** de \mathcal{D} . Una carta de dicho atlas maximal, $(U, \phi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$, se denomina **carta local admisible**.

Véamos ahora algunos ejemplos de atlas a modo de aclaración:

Ejemplos 2.2.7. 1. El espacio vectorial \mathbb{R}^n , considerado como un *espacio topológico* admite un atlas formado por una única carta (\mathbb{R}^n, Id) , donde la aplicación Id es la aplicación identidad. De forma general, en cualquier espacio de Banach, F , se puede considerar el atlas (F, Id) .

2. **La proyección estereográfica.** En el espacio \mathbb{R}^{n+1} consideremos la esfera n -dimensional, $\mathcal{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, donde $\|\cdot\|$ denota la *norma euclidiana* de \mathbb{R}^{n+1} . La idea es proyectar todos los puntos de la esfera sobre \mathbb{R}^n . Para ello, consideraremos dos biyecciones desde la esfera menos el polo norte $N = (1, 0, \dots, 0)$ a \mathbb{R}^n y desde la esfera menos el polo sur $S = (-1, 0, \dots, 0)$ a \mathbb{R}^n . A estas aplicaciones las llamaremos *proyecciones estereográficas* y vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\phi_N : U = \mathcal{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi_N(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^2}{1 - x^1}, \dots, \frac{x^{n+1}}{1 - x^1} \right)$$

$$\phi_S : V = \mathcal{S}^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi_S(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^2}{1 + x^1}, \dots, \frac{x^{n+1}}{1 + x^1} \right)$$

Estas dos aplicaciones nos proporcionan dos cartas locales para la esfera \mathcal{S}^n : (ϕ_N, U) y (ϕ_S, V) . Para verlo, simplemente necesitamos considerar la aplicación de cambio de coordenadas, $\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ cuya expresión viene dada por $(\phi_S \circ \phi_N^{-1})(z) = \frac{z}{\|z\|^2}$, que claramente se trata de un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^∞ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hacia él mismo.

Por lo tanto, acabamos de ver que las cartas $\{(U, \phi_N), (V, \phi_S)\}$ son un atlas para \mathcal{S}^n ya que los abiertos U y V claramente recubren toda la esfera $\mathcal{S}^n = U \cup V$ y las aplicaciones ϕ_N, ϕ_S son cartas compatibles, puesto que la aplicación de cambio de coordenadas es \mathcal{C}^∞ .

Gracias a las definiciones de *atlas* y *estructura diferencial* sobre un espacio topológico M , ya disponemos de las herramientas necesarias para poder dar una definición formal de *variedad diferenciable*:

Definición 2.2.8. Llamaremos *variedad diferenciable*, M , al par $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$ donde \mathcal{S} es el espacio topológico sobre el que definimos nuestra variedad y \mathcal{D} es una estructura diferenciable de orden \mathcal{C}^r definida sobre el espacio \mathcal{S} .

Observación. Por abuso de notación, la variedad diferenciable se suele identificar con el espacio topológico subyacente, por lo que al par (M, \mathcal{D}) simplemente se le denota como M .

Según el orden de diferenciabilidad de la estructura diferencial diferenciamos entre diferentes tipos de variedades:

Definición 2.2.9. Dada una variedad M , diremos que es una *variedad topológica* si es de orden \mathcal{C}^0 , una *variedad analítica* si es de orden \mathcal{C}^ω y una *variedad diferenciable* si es de orden \mathcal{C}^∞ .

De ahora en adelante consideraremos que las variedades sobre las que trabajamos son variedades diferenciables. Veamos a continuación algunos ejemplos de variedades diferenciables:

Ejemplos 2.2.10. 1. Sea E un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n . Consideremos el espacio topológico dado por el espacio E dotado de su topología canónica. De esta forma, cualquier isomorfismo $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta global del espacio y (E, ϕ) proporciona un atlas que permite definir una *estructura diferenciable* sobre E . Obsérvese que dicha estructura diferenciable es independiente del isomorfismo considerado.

2. Retomemos el ejemplo de la esfera n -dimensional, \mathcal{S}^n . Vamos ahora a considerar otro atlas diferente. Alternativamente, podemos escoger el atlas formado por las $2(n+1)$ cartas siguientes:

$$(U_\alpha^\pm, \psi_\alpha^\pm) \text{ tal que } U_\alpha^\pm = \{x \in \mathcal{S}^n \mid \pm x^\alpha > 0\}, \psi_\alpha^\pm : U_\alpha^\pm \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\}$$

para α tomando valores entre 1 y $n+1$ y donde las aplicaciones ψ_α^\pm están definidas por la expresión:

$$\psi_\alpha^\pm(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{\alpha-1}, x^{\alpha+1}, \dots, x^{n+1})$$

donde se ha omitido la coordenada x^α . Geométricamente, las aplicaciones ψ_α^\pm proyectan el hemisferio que contiene al polo $(0, \dots, \pm 1, \dots, 0)$ asociado a la coordenada x^α sobre la bola unidad de la hipersuperficie tangente a la esfera en el polo considerado.

Para poder afirmar que, efectivamente, $(U_\alpha^\pm, \psi_\alpha^\pm)$ es un atlas para la esfera \mathcal{S}^n necesitamos verificar que los abiertos U_α^\pm recubren toda la esfera y la aplicación de cambio de coordenadas es una aplicación \mathcal{C}^r . Es fácil ver que la primera afirmación es cierta, pues todo $x \in \mathcal{S}^n$ tiene una coordenada no nula, por lo que debe estar contenido en algún hemisferio U_α^\pm . Por otro lado, la aplicación de cambio de coordenadas viene dada por la expresión

$$(\psi_\beta^\pm \circ (\psi_\alpha^\pm)^{-1})(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^{\beta-1}, y^{\beta+1}, \dots, y^{\alpha-1}, \pm \sqrt{1 - |y|^2}, y^\alpha, \dots, y^n)$$

donde $\beta > 1$. Claramente dicha aplicación es \mathcal{C}^∞ y, por lo tanto, $(U_\alpha^\pm, \psi_\alpha^\pm)$ es un atlas alternativo para la esfera \mathcal{S}^n , el cual es equivalente al estudiado previamente. Es un ejercicio interesante para el lector probar que este atlas pertenece a la estructura diferenciable de \mathcal{S}^n dada por la proyección estereográfica. Para ello, simplemente habría que comprobar que las cartas ψ_α^\pm son equivalentes a las cartas de la proyección estereográfica ϕ_1, ϕ_2 .

3. Un mismo conjunto puede presentar diferentes *estructuras diferenciables* según la carta local que consideremos. Por ejemplo, si consideramos el conjunto de los números reales \mathbb{R} como espacio topológico podemos definir sobre él las dos cartas locales siguientes:

$$(U_1, \phi_1) : U_1 = \mathbb{R}, \phi_1(x) = x^3 \in \mathbb{R}$$

$$(U_2, \phi_2) : U_2 = \mathbb{R}, \phi_2(x) = x \in \mathbb{R}$$

Estas dos cartas son incompatibles entre ellas ya que la aplicación $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ no es una aplicación diferenciable en el origen. Por lo tanto, estas cartas otorgan al conjunto \mathbb{R} estructuras diferenciables diferentes.

Por último, nos será útil definir los subconjuntos abiertos de una variedad, ya que nos proporcionará sobre la variedad una topología.

Definición 2.2.11. Sea M una variedad diferenciable. Diremos que un subconjunto $N \subset M$ es un **subconjunto abierto** de la variedad si para cada $x \in N$ es posible encontrar una carta local admisible (U, ϕ) tal que $x \in U$ y $U \subset N$.

Proposición 2.2.12. El conjunto de abiertos de la variedad M define sobre ella una topología.

Demostración. Simplemente basta con escoger como base de la topología la familia finita formada por las intersecciones de los dominios de las cartas.

En la definición que hemos dado hasta ahora de *variedad diferenciable* no hemos realizado ninguna suposición sobre la topología en dicha variedad. Sin embargo, existen ciertas condiciones topológicas sobre el conjunto M que suelen imponerse:

- M ha de ser un *espacio de Hausdorff*.
- La base de abiertos de la topología del conjunto M ha de tener un número contable de elementos, es decir, M necesita ser un *espacio paracompacto*.

Ejemplo 2.2.13. Si tenemos en cuenta las características topológicas mencionadas anteriormente, se puede ver que las únicas variedades paracompactas y conexas de dimensión 1 son el conjunto de números reales \mathbb{R} y la circunferencia unidad \mathcal{S}^1 . Esto quiere decir que cualquier otra variedad de dimensión 1 es difeomórfica bien a los números reales \mathbb{R} o bien a la circunferencia \mathcal{S}^1 . Por ejemplo, es fácil ver que la circunferencia con un nudo es difeomorfa a \mathcal{S}^1 o que cualquier intervalo abierto es difeomorfo a todos los números reales.

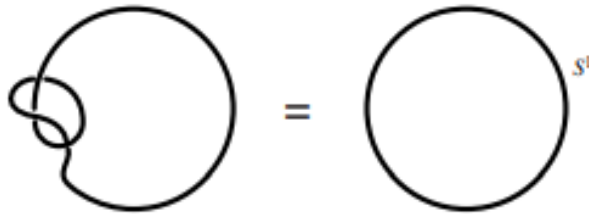


Figura 3: El nudo y la circunferencia \mathcal{S}^1 son difeomorfos [Fuente: [16]]

2.2.1 Subvariedades. Variedad producto y cociente

Hasta ahora hemos definido el objeto matemático con el que trabajaremos: la *variedad diferenciable*. De forma análoga al álgebra lineal, nos va a interesar trabajar con subconjuntos de nuestra variedad y con aplicaciones entre ellas. Por eso, en esta sección introduciremos las *subvariedades diferenciables*, como la analogía no lineal de los subespacios vectoriales en álgebra lineal.

Definición 2.2.14. Sea M una variedad diferenciable n -dimensional. Diremos que un subconjunto $N \subset M$ es una **subvariedad diferenciable** si verifica que para todo $x \in N$ existe una carta admisible con la estructura diferenciable de M , (U, ϕ) , tal que $x \in U$ y la aplicación $\phi : U \rightarrow V$ verifica que $\phi(U \cap N) = V \cap (M \times \{0\})$.

Observación. Si llamamos $\bar{U} = U \cap N$ al entorno abierto de x en N y $\bar{V} = V \cap (M \times \{0\})$ al abierto imagen de U en M , entonces la aplicación restricción de ϕ sobre estos abiertos, $\bar{\phi} : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$ es una carta n -dimensional de N y el conjunto de estas cartas define sobre N una estructura de variedad diferenciable.

Una vez definido el concepto de *subvariedad diferenciable*, es conveniente estudiar dos variedades importantes que se pueden construir a partir de otras variedades: la *variedad producto* y la *variedad cociente*.

Variedad producto

Definición 2.2.15. Sean $(\mathcal{S}_1, \mathcal{D}_1)$ y $(\mathcal{S}_2, \mathcal{D}_2)$ dos variedades diferenciables generadas por los atlas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) respectivamente. La **variedad producto** $(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)$ es la variedad que viene dada por el conjunto $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ dotado de la estructura diferenciable $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ generada por el atlas $(U_1 \times U_2, \phi_1 \times \phi_2)$.

Observación. 1. La topología sobre la variedad producto es, como es de esperar, la topología producto.

2. Inductivamente, es posible definir el producto de un número finito de variedades diferenciables. Un ejemplo clásico de variedad producto de n variedades es el toro n -dimensional, generado por el producto de n circunferencias unidad: $\mathbb{T}^n = \mathcal{S}^1 \times \cdots \times \mathcal{S}^1$.

Variedad cociente

De forma análoga al álgebra lineal, para construir la *variedad cociente* necesitaremos una variedad diferenciable y una *relación de equivalencia*. Sin embargo, dada una variedad y una relación de equivalencia cualesquiera, no siempre es posible construir el espacio cociente, sino que necesitamos que la relación de equivalencia cumpla ciertas condiciones. En particular, nos interesan un tipo concreto de relación de equivalencia, que sea compatible con nuestra definición de variedad. Veámoslo a continuación:

Definición 2.2.16. Sea (M, \mathcal{D}) una variedad y sea R una relación de equivalencia sobre dicha variedad. Diremos que la relación de equivalencia R es una **relación regular** sobre M si el *espacio cociente* tiene estructura de variedad diferenciable para la cual la proyección canónica $\pi : M \rightarrow M/R$ es una *inmersión*, es decir, su aplicación diferencial es exhaustiva en todo su dominio.

En tal caso, podemos definir la variedad cociente de la siguiente forma:

Definición 2.2.17. Sea M una variedad y R una *relación de equivalencia regular* sobre M . Entonces, diremos que $(M/R, \hat{\mathcal{D}})$ es la **variedad cociente** de M por R y la estructura diferenciable $\hat{\mathcal{D}}$ es la que viene dada por el atlas obtenido al componer el atlas de \mathcal{D} con la aplicación de paso al cociente, que se obtiene de forma natural (y única) gracias a la *propiedad universal del cociente*.

Observación. La estructura de variedad cociente, si existe, es única.

Veámos a continuación uno de los ejemplos clásicos de variedad cociente:

Ejemplo 2.2.18. Sea \mathbb{T} el **toro unidimensional**, el conjunto obtenido al enrollar la recta real alrededor de la circunferencia unidad. Formalmente, el toro unidimensional \mathbb{T} es el conjunto de los números reales \mathbb{R} módulo 1, es decir, el espacio cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} de \mathbb{R} por la relación de equivalencia $x \sim x' \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$. Considerando la *aplicación proyección canónica* $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$, es posible obtener cartas locales para el toro unidimensional dado cualquier intervalo abierto I de \mathbb{R} . En efecto, si llamamos $\phi : I \rightarrow \mathbb{T}$ a la carta de dominio $U \subset \mathbb{R}$ y consideramos el homeomorfismo inducido por la aplicación cociente $\pi_I : I \rightarrow \pi(I)$, podemos definir la carta local $\bar{\phi} = \phi \circ \pi_I^{-1}$ de dominio el conjunto abierto $\pi(I)$. Por lo tanto, hemos obtenido así otra carta equivalente $\bar{\phi}$ cuyo dominio es otro intervalo abierto.

Veamos ahora, escogidos dos conjuntos abiertos de \mathbb{R} apropiados y considerando la coordenada canónica de \mathbb{R} , cómo llevar a cabo una construcción explícita de un atlas del *toro unidimensional*. En este caso, nuestra carta $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\phi(x) = x \in \mathbb{R}$. Por tanto, si consideramos los intervalos $I = (0, 1)$ y $J = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ tendremos que la carta coordenada ϕ con dominio I vendrá dada por $\bar{\phi}_I = (\pi_I)^{-1} : \pi(I) \rightarrow (0, 1)$, $\bar{\phi}_I([x]) = x$ mientras que la carta coordenada ϕ con dominio J vendrá dada por $\bar{\phi}_J = (\pi_J)^{-1} : \pi(J) \rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $\bar{\phi}_J([y]) = y$. Gracias a que π_I, π_J son homeomorfismos dados por la aplicación de paso al cociente, sus inversas son cartas unidimensionales del espacio topológico \mathbb{T} y, en particular, $\pi(I)$ y $\pi(J)$ recubren \mathbb{T} . Para comprobar que ambas cartas forman un atlas de \mathbb{T} solo faltaría ver que, en efecto, la aplicación de cambio de coordenadas $\bar{\phi}_J \circ \bar{\phi}_I^{-1}$ es una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ . Veámoslo:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_J \circ \bar{\phi}_I^{-1} : (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\} &\rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \setminus \{1\}, \\ x &\mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ x & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta aplicación, claramente, es una aplicación \mathcal{C}^∞ . Realizando un argumento análogo para $\bar{\phi}_I \circ \bar{\phi}_J^{-1}$ llegamos a la conclusión de que la aplicación de cambio de coordenadas es \mathcal{C}^∞ y, por lo tanto, tenemos que $\{(\pi(I), \bar{\phi}_I), (\pi(J), \bar{\phi}_J)\}$ es un atlas de \mathbb{T} .

2.2.2 Aplicaciones entre variedades. Pull-back y push-forward

En la sección anterior hemos visto dos construcciones importantes que se pueden hacer con las variedades. Sin embargo, en esta sección estamos interesados en definir y conocer las aplicaciones entre variedades. De forma análoga al álgebra lineal con las aplicaciones lineales, dispondremos de aplicaciones entre dos variedades diferenciables, respetando su estructura diferencial. Así, podremos obtener una expresión de dicha aplicación teniendo en cuenta las cartas locales de las variedades. Veámoslo:

Definición 2.2.19. Sean M y N dos variedades diferenciales y sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación entre dichas variedades. Sean (U, ϕ) y (V, ψ) dos cartas locales admisibles de M y N , respectivamente, cumpliendo que $f(U) \subset V$. Entonces, podemos definir la **expresión local de f** entre las cartas (U, ϕ) y (V, ψ) como la aplicación que viene dada por:

$$f_{\phi\psi} = \psi \circ f|_U \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

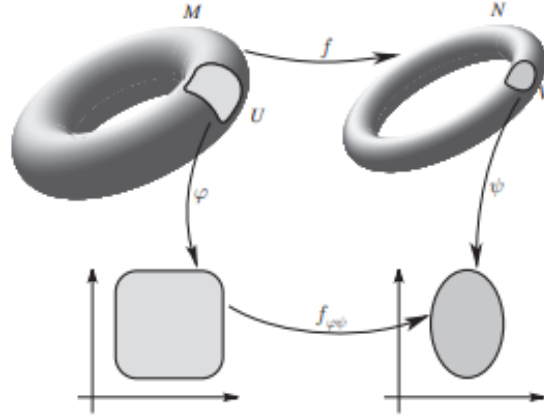


Figura 4: Representación de la expresión local de la función f [Fuente: [14]]

En general, no siempre es posible encontrar la *expresión local* de una aplicación entre dos variedades. Sin embargo, solo necesitamos imponer continuidad de la función, en el sentido clásico, en el punto $p \in M$ donde se quiera obtener la *expresión local*. Además, la diferenciabilidad de la función f se estudiará a partir de la diferenciabilidad de $f_{\phi\psi}$, en el sentido del *cálculo diferencial*. De forma análoga al *cálculo diferencial*, destacaremos unas funciones “especiales” llamadas **difeomorfismos**.

Definición 2.2.20. Sean M y N dos variedades diferenciables y sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación entre ellas. Diremos que la aplicación f es un **difeomorfismo** si es de clase \mathcal{C}^r , es una aplicación *biyectiva* y su inversa global $f^{-1} : N \rightarrow M$ es también de clase \mathcal{C}^r . En tal caso, diremos que las variedades M y N son difeomorfas.

Así, tenemos una analogía entre las funciones entre variedades diferenciables y las funciones entre abiertos de \mathbb{R}^n . Veamos un ejemplo de una función entre la esfera n -dimensional para que sirva de aclaratorio:

Ejemplo 2.2.21. Consideremos la esfera $(n+1)$ -dimensional \mathcal{S}^n . Sea f la aplicación antipodal $f : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$, $f(p) = -p$, que queremos ver que se trata de un *difeomorfismo*. Para comprobarlo, tan solo hemos de darnos cuenta de que dicha aplicación es una *involución*, es decir, verifica que $f \circ f = Id$. Por lo tanto, f claramente es una aplicación biyectiva y solo quedaría verificar que, en efecto, es una aplicación \mathcal{C}^∞ , pues si lo es f también lo será f^{-1} por el hecho de ser una involución. Para probarlo, simplemente hemos de comprobar que la expresión local de f para las cartas del atlas estereográfico $\{(U, \phi_N), (V, \phi_S)\}$ es una función \mathcal{C}^∞ . La expresión local de f , $f_{\phi_N\phi_S}$, viene dada por:

$$f_{\phi_N\phi_S}(p) = \phi_S(f(\phi_N^{-1}(p))) = \phi_S(-\phi_N^{-1}(p)) = -p, \forall p \in \mathcal{S}^n$$

que se trata de una aplicación \mathcal{C}^∞ . Entonces, queda demostrado que la aplicación $f : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ es un difeomorfismo de la esfera $(n+1)$ -dimensional en sí misma.

A partir de ahora, nos centraremos en el estudio de otro tipo de funciones sobre las variedades diferenciables. Consideraremos funciones que envían las variedades a abiertos de \mathbb{R}^n , permitiendo estudiar propiedades sobre ellas, extraer información relevante de la variedad, etc.

Definición 2.2.22. Sea M una variedad diferenciable. Diremos que una función de M a un espacio vectorial n -dimensional es la aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Además, diremos que dicha función es de clase \mathcal{C}^r si y solo si existe un atlas de M , $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, tal que la expresión local $\tilde{f} = f|_{U_\alpha} \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^r .

La definición es análoga al caso de una función entre variedades. Sin embargo, nos permite extraer propiedades de las variedades, como veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplos 2.2.23. 1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera tridimensional de radio a dada por los puntos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$. Sobre este conjunto podemos definir una función que nos dé información sobre S , por ejemplo, la función altura $f(x, y, z) = z$, que nos proporciona para cada punto su coordenada z . Esta función tan sencilla es claramente una función diferenciable de S a los números reales.

2. Sea \mathbb{P}^n el espacio proyectivo real n -dimensional, sobre el que podemos definir un atlas formado por $n+1$ cartas considerando las *coordenadas homogéneas* del espacio proyectivo:

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] | x_i \neq 0\}, \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\phi_i([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Dado este atlas, podemos considerar la aplicación inversa de la *proyección* $p : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ que envía un punto del espacio proyectivo a su punto en el espacio vectorial de origen. Esta aplicación se trata también de una función diferenciable.

Una vez definido el concepto de aplicaciones entre variedades y funciones de variedades a \mathbb{R}^n , es posible relacionar ambos conceptos a través de la generalización de la *composición* o la *imagen recíproca*. Por eso, introduciremos a continuación la definición de las funciones ***pullback***, como generalización de la composición entre funciones, y ***pushforward***, que permite asociar campos tensoriales definidos sobre variedades diferentes.

Definición 2.2.24. Sean M y N dos variedades diferenciables y sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable o *suave* entre ambas variedades. Supongamos que la función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función *suave* de la variedad N . Entonces, diremos que el ***pullback*** de f por ϕ es la función diferenciable $\phi^* : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\phi^*(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(\phi^*(f))(x) = f(\phi(x))$ para todo $x \in M$ arbitrario.

Observación. De forma más general, se puede considerar la aplicación $g : N \rightarrow A$ de N a otra variedad diferenciable A . En tal caso, el *pullback* de g por ϕ vendría dado por la aplicación $\phi^* : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\phi^*(f) : M \rightarrow A$, $(\phi^*(f))(x) = f(\phi(x))$ es un mapa *suave* entre las variedades M y A .

Veamos unos ejemplos con coordenadas para ver en qué consiste exactamente la acción del *pullback*.

Ejemplos 2.2.25. 1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función definida por $F(\phi, \theta) = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$, que es una función diferenciable. Consideremos también la función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ donde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^3 . Entonces, el cambio de coordenadas a esféricas (con radio $r = 1$) para la función g vendría dado por el *pullback* $F^*(g)$:

$$F^*(g) = F^*(x^2 + y^2) = F^*(x^2) + F^*(y^2) = (\cos\phi \sin\theta)^2 + (\sin\phi \sin\theta)^2 = \sin^2\theta$$

2. Consideremos la 1-forma (que definiremos formalmente más adelante, pero que ya conocemos del cálculo integral), $\beta = xdx + ydy + zdz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, y sea ι el cambio de coordenadas a *coordenadas esféricas*. Entonces, el *pullback* de β por ι , $\iota^*(\beta)$, se puede calcular de la siguiente forma:

$$\iota^*(xdx) = (a \sin\theta \cos\phi) d(a \sin\theta \cos\phi) = a^2 \sin\theta \cos\phi (\cos\theta \cos\phi d\theta - \sin\theta \sin\phi d\phi)$$

$$\iota^*(ydy) = (a \sin\theta \sin\phi) d(a \sin\theta \sin\phi) = a^2 \sin\theta \sin\phi (\cos\theta \sin\phi d\theta + \sin\theta \cos\phi d\phi)$$

$$\iota^*(zdz) = (a \cos\theta) d(a \cos\theta) = -a^2 \cos\theta \sin\theta d\theta$$

De esta forma, sumando todos los términos obtenemos que $\iota^*(\beta) = \iota^*(xdx + ydy + zdz) = 0$. Por tanto, la 1-forma β es nula considerando las coordenadas esféricas.

La aplicación *pushforward* se define a partir de una aplicación entre variedades diferenciables, permitiendo asociar campos tensoriales definidos sobre la primera variedad con campos definidos sobre la segunda variedad. Del *cálculo diferencial*, sabemos que dada una aplicación *suave* entre dos variedades diferenciables $\phi : M \rightarrow N$, la aplicación *diferencial* de ϕ , $d\phi$, en un punto $x \in M$ proporciona la mejor aproximación lineal de la función en un entorno de dicho punto. De hecho, es una aplicación que envía elementos del *espacio tangente* de M en el punto x a elementos del *espacio tangente* de N en el punto $\phi(x)$. Es en este sentido que la aplicación “empuja” (*push*) los vectores tangentes de M hasta los vectores tangentes de N . La aplicación *pushforward* generaliza esta idea:

Definición 2.2.26. Sean M y N dos variedades diferenciables y sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable o *suave* entre ambas variedades. Entonces, el ***pushforward*** de ϕ en un punto $x \in M$ se define como la función diferenciable $\phi_* : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} N$ tal que $(\phi_* X)(f) = X(f \circ \phi) = X(\phi^* f)$ para cualquier función *suave* $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ y donde $X \in T_x M$.

2.3 Fibrado vectorial

En Relatividad General necesitaremos trabajar sobre un concepto que va más allá de las variedades diferenciables: el ***fibrado vectorial*** de una variedad. Los *fibrados vectoriales* son una generalización del concepto de variedad diferenciable. Para hacernos una idea, un *fibrado vectorial* es una construcción geométrica que asigna a cada punto de la variedad un *espacio vectorial*, de forma que esta unión es compatible y permite que todos los espacios vectoriales juntos formen otra variedad. Esta idea no es algo nuevo, pues es una herramienta ya conocida del *cálculo diferencial*, donde estamos acostumbrados a considerar el *hiperplano tangente* de una

variedad dado por el núcleo de la aplicación diferencial. De hecho, dicha aplicación diferencial aplicada a un punto nos da su vector tangente a la variedad. Esta idea de “enganchar” vectores tangentes a puntos de la variedad es la que debemos tener presente en el desarrollo de esta sección, puesto que lo que haremos será simplemente generalizar este concepto.

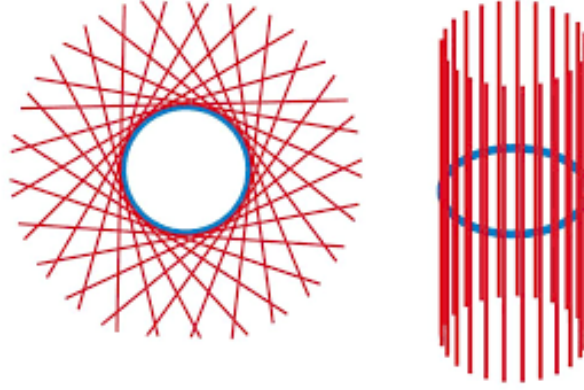


Figura 5: Rectas tangentes a la circunferencia \mathcal{S}^1 en todos sus puntos[Fuente: [16]]

Definición 2.3.1. Sean B y F dos *espacios de Banach* y $U \subset B$ un subconjunto abierto de B . Un **fibrado vectorial** consiste en una *variedad total*, E ; una *variedad de base*, B , y una función continua y exhaustiva, $\pi : E \rightarrow B$, llamada *proyección*, tal que las **fibras** adjuntas a cada punto de, $\pi^{-1}(\{b\})$, $b \in B$ son *espacios vectoriales*. La topología y la estructura diferencial de E están definidas de forma que, globalmente, E es una *variedad producto* y diremos que el producto cartesiano $U \times F$ es un **fibrado vectorial local**:

$$\mathbf{E} = \bigsqcup_{b \in \mathbf{B}} \mathbf{E}_b, \quad \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbf{F}$$

Observación. 1. Aunque lo hemos comentado en la definición de *fibrado vectorial*, es necesario hacer incapié en las siguientes definiciones. Dada la variedad total obtenida a partir de un fibrado vectorial $E = B \times F$, llamaremos a B el *espacio de base* y F será el espacio vectorial adjunto a cada punto de B , que suele denominarse *fibra* de E . Para cada $b \in B$, llamaremos *fibra* de b al conjunto $\{b\} \times F$, que está dotado de la estructura de espacio vectorial de F . La aplicación $\pi : \mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{B}$ que viene dada por $\pi(b, f) = b$ es una aplicación continua y exhaustiva y se llama *proyección*. Con esta notación, la *fibra* sobre el punto $b \in B$ es $\pi^{-1}(b)$.

2. En general diremos que la cuaterna (E, B, π, F) es el **fibrado tangente**. A veces simplemente lo denotaremos por $E \rightarrow B$.

Dado un *fibrado vectorial*, hemos visto que es posible pasar de la variedad total a la variedad de base gracias a la aplicación π . Sin embargo, en numerosas ocasiones nos será de gran ayuda poder trabajar con una función que nos permite pasar de la variedad de base a la variedad total. Este hecho motiva a la siguiente definición:

Definición 2.3.2. Dado un *fibrado vectorial*, (E, B, π, F) , diremos que una **sección** del fibrado vectorial es una función *suave* $s : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_B$. Al conjunto de todas las secciones de un fibrado vectorial le denotamos como $\Gamma(E)$.

Observación. Entre todas las posibles funciones (*secciones*) que se pueden definir entre B y E , siempre existirá una sección a destacar, que llamaremos la **sección cero**. Esta sección envía cada punto $b \in B$ al cero de la fibra correspondiente a E_b .

Con todas estas definiciones ya estamos listos para estudiar diferentes fibrados vectoriales, cuyas secciones serán los elementos con los que trabajaremos en la física de la Relatividad General.

2.3.1 Principales ejemplos de fibrados vectoriales

1. *Fibrado trivial.* Si consideramos una variedad diferenciable M como variedad de base y escogemos como fibra el espacio vectorial de los números reales \mathbb{R} , tenemos que el **fibrado trivial** vendría dado por $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Con esta definición, cualquier **función diferenciable** de M a \mathbb{R} es una sección del fibrado trivial $f \in \Gamma(M \times \mathbb{R})$, por lo que denotaremos $\mathcal{C}^\infty(M) = \Gamma(M \times \mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones *suaves* de M a \mathbb{R} .
2. *Fibrado tangente.* Escogiendo como espacio de base a la variedad M , el **fibrado tangente**, $\pi : TM \rightarrow M$, es aquel que da como variedad total la unión disjunta de los espacios tangentes a M en cada punto, es decir, el conjunto:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigsqcup_{p \in M} \{(p, v_p) \mid p \in M, v_p \in T_p M\}$$

Con esta definición, cualquier **campo vectorial** de M es una sección del fibrado tangente $X \in \Gamma(TM)$, es decir, una aplicación diferenciable $V : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$ y $X_p \in T_p M$, $\forall p \in M$. Así, denotaremos $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ al conjunto de campos vectoriales de M .

3. *Fibrado cotangente.* Escogiendo como espacio de base a la variedad M , el **fibrado cotangente**, $\pi : T^*M \rightarrow M$, es aquel que da como variedad total la unión disjunta de los espacios cotangentes a M en cada punto, es decir, el conjunto:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \bigsqcup_{p \in M} \{(p, \alpha_p) \mid p \in M, \alpha_p \in T_p^*M\}$$

Con esta definición, cualquier **1-forma diferencial** de M es una sección del fibrado cotangente $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, es decir, una aplicación diferenciable $\alpha : M \rightarrow T^*M$ tal que $\pi \circ \alpha = Id_M$ y $\alpha_p \in T_p^*M$, $\forall p \in M$. Así, denotaremos $\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$ al conjunto de 1-formas diferenciales de M .

Observación. a) Siguiendo la notación clásica, el espacio T_p^*M es el espacio dual de $T_p M$. Análogamente, T^*M es el *fibrado dual* de TM . De esta forma, podemos establecer una relación de dualidad entre los campos vectoriales y las 1-formas diferenciales de una variedad. En efecto, diremos que $\Omega^1(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$ son, *en cierto modo*, fibrados vectoriales duales en el sentido en que:

$$\alpha \in \Omega^1(M), \alpha : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \text{ dada por } \alpha(V)(p) = \alpha_p(V_p)$$

$W \in \mathfrak{X}(M)$, $V : \Omega^1(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ dada por $W(\beta)(p) = \beta_p(W_p)$

- b) Retomando las funciones *pullback* y *pushforward* estudiadas en la sección anterior, debemos tener en cuenta que no siempre es posible calcular el *pullback* ni el *pushforward* de un campo vectorial. Por ejemplo, en el caso de tener un campo vectorial $F : M \rightarrow N$ tal que es un *difeomorfismo*, entonces tenemos que $Y = F_*X \in \mathfrak{X}(N)$ donde la aplicación F_* es la *diferencial* de F y se cumple que $X \in \mathfrak{X}(M)$, pero no siempre es posible calcularlo para cualquier campo arbitrario. Por el contrario, dada una 1-forma diferencial siempre se puede obtener su *pullback* por una función *suave* $f : M \rightarrow N$.

4. *Fibrado tensorial*. El ***(r,s)-fibrado tensorial*** de la variedad diferenciable M es una generalización de los fibrados tangente y cotangente mediante *tensorización* de r espacios contravariantes tangentes y s espacios covariantes cotangentes:

$$\mathcal{T}^{r,s}(M) = (TM)^{\otimes r} \bigotimes (T^*M)^{\otimes s}$$

El fibrado tensorial $\mathcal{T}^{r,s}_p(M)$ está generado por elementos del tipo $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \in (T_p M)^{\otimes r} \bigotimes (T_p^* M)^{\otimes s}$. Con estas definiciones, un (r,s) campo tensorial de M es una sección del fibrado tensorial $T \in \Lambda(\mathcal{T}^{r,s}(M))$, es decir, una aplicación diferenciable $T : M \rightarrow \mathcal{T}^{r,s}$ tal que $\pi \circ T = Id_M$. De esta forma, definiremos $\mathfrak{T}^{r,s}(M) = \Lambda(\mathcal{T}^{r,s}(M))$ como el conjunto de todos los campos tensoriales de orden (r,s) sobre M .

5. *Fibrado cuña (producto exterior)*. El ***fibrado “cuña”***, definido a través del *producto exterior*, viene dado por la siguiente expresión:

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$$

Efectivamente, se define como el producto exterior de k fibrados cotangentes, por lo que sus elementos son de la forma $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_{k-1} \wedge \alpha_k \in T_p^*M \wedge \cdots \wedge T_p^*M = \Lambda^k(T_p^*M)$. Así, es conveniente recordar la expresión del *producto exterior*, que viene dada por:

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(k)}$$

donde σ es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$.

Estos conceptos nos permiten definir las k -formas diferenciales de M como secciones $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$, es decir, como aplicaciones diferenciables $\alpha : M \rightarrow \Lambda^k(T^*M)$ tal que $\pi \circ \alpha = Id_M$. Así, denotaremos $\Omega^k(M)$ el conjunto de todas las k -formas diferenciales sobre M y diremos que la forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ es de grado $|\alpha| := k$.

Observación. Hay un caso importante de formas diferenciales cuando el grado, k , es igual a la dimensión de la variedad diferenciable sobre la que están definidas las formas. Veámoslo:

Definición 2.3.3. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Diremos que una **forma de volumen** es una forma diferencial de grado máximo, n , que no se anula sobre ningún punto de la variedad M . En tal caso, denotaremos a dicho conjunto como:

$$\text{Vol}(M) = \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \omega_p \neq 0, \forall p \in M\}$$

Debido a que el módulo $\Omega^n(M)$ tiene un único generador, dada una forma de volumen, $\omega \in \text{Vol}(M)$, y una forma diferencial de orden n , $\alpha \in \Omega^n(M)$, existirá una función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\alpha = f\omega$. Las formas de volumen permitirán definir la forma de integrar funciones sobre variedades diferenciables, proporcionando una medida para la *integral de Lebesgue*.

6. **Fibrado pullback.** Dado un fibrado vectorial cualquiera (E, B, π, F) y una aplicación continua $f : D \rightarrow B$, podemos definir el **fibrado pullback** de $\pi : E \rightarrow B$ a través de f como el fibrado que tiene como espacio total el conjunto:

$$f^*E = \{(d, e) \in D \times E \mid f(d) = \pi(e)\}$$

equipado con la *topología subespacio* y la proyección sobre el primer factor $\pi_1 : f^*E \rightarrow D$. De esta forma, obtendríamos otro fibrado vectorial dado por la cuaterna (f^*E, D, π_1, E) que llamaríamos *fibrado pullback* por f .

2.3.2 Aplicaciones importantes sobre fibrados vectoriales

Ya hemos visto diferentes ejemplos representativos sobre cómo son y en qué consisten los *fibrados vectoriales*. De la misma forma que hicimos con las variedades, ahora estaremos interesados en definir funciones entre diferentes fibrados vectoriales. La idea será definir *localmente* cómo enviar elementos de una fibra a otra. Así, podremos usar este concepto para generalizar la función a todo el fibrado. Además, veremos ejemplos concretos de funciones sobre campos tensoriales, como son las contracciones, derivaciones, etc.

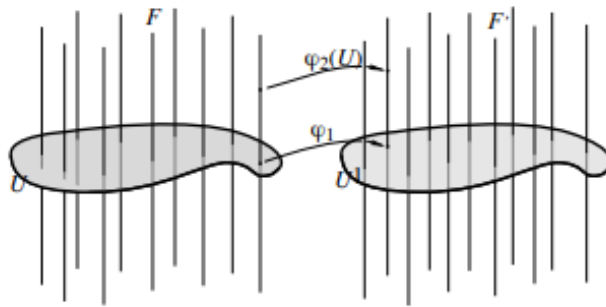


Figura 6: Función entre dos fibrados vectoriales [Fuente: [18]]

Definición 2.3.4. Sean (E, B, π, F) y $(\tilde{E}, \tilde{B}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ dos fibrados vectoriales tales que $U \subset B$, $\tilde{U} \subset \tilde{B}$ permiten definir los fibrados vectoriales locales $U \times F$, $\tilde{U} \times \tilde{F}$, respectivamente. Diremos

que una aplicación $\phi : U \times F \rightarrow \tilde{U} \times \tilde{F}$ es **localmente una aplicación (o mapa) \mathcal{C}^k entre fibrados vectoriales** si es de la forma $\phi(u, f) = (\phi_1(u), (\phi_2(u))(f))$ donde $\phi_1 : U \rightarrow \tilde{U}$ y $\phi_2 : U \rightarrow \mathcal{L}(F, \tilde{F})$ son aplicaciones \mathcal{C}^k . Dicho *mapa local* envía la fibra $\{u\} \times F$ del fibrado $U \times F$ a la fibra $\{\phi_1(u)\} \times \tilde{F}$ de $\tilde{U} \times \tilde{F}$.

Con esta definición, podemos usar abiertos del espacio de base y cartas admisibles del espacio total para poder definir una aplicación definida sobre todo el fibrado.

Definición 2.3.5. Sean (E, B, π, F) y $(\tilde{E}, \tilde{B}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ dos fibrados vectoriales. Diremos que la aplicación $f : E \rightarrow \tilde{E}$ es una **aplicación (o mapa) entre fibrados vectoriales** si para todo $v \in E$ y para toda carta local admisible de \tilde{E} , (W, ψ) , tal que $f(v) \in W$, existe una carta local admisible de E , (V, ϕ) , tal que $f(V) \subset W$ cumpliendo que la *expresión local de f* para dichas cartas, $f_{\phi\psi} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es localmente una aplicación \mathcal{C}^k entre fibrados vectoriales.

Una vez definido el concepto de aplicación entre fibrados vectoriales, es interesante que veamos algunos ejemplos prácticos de aplicaciones entre campos tensoriales que nos serán de gran ayuda para establecer las herramientas con las que trabajaremos en *Relatividad General*.

Contracción entre tensores

Dada una variedad diferenciable, M , podemos considerar la dualidad entre el conjunto de campos vectoriales sobre M , $\mathfrak{X}(M)$, y el conjunto de 1-formas diferenciales sobre M , $\Omega^1(M)$, definiendo la siguiente aplicación entre tensores:

$$C : \mathfrak{T}^{1,1}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{0,0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M) \text{ t.q. } C(X \otimes \alpha) = \alpha(X), \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha \in \Omega^1(M)$$

ya que podemos considerar un tensor $T \in \mathfrak{T}^{1,1}(M)$ como una aplicación tal que $T : \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$. La idea es que podemos generalizar esta operación para tensores de cualquier orden mediante la siguiente definición:

Definición 2.3.6. Sea $T \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$ un tensor de orden (r, s) sobre la variedad M . Llamaremos **(p, q) -contracción tensorial** de T a la familia de aplicaciones lineales $C_q^p : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{r-1,s-1}(M)$ tales que:

$$(C_q^p T)(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = C(T(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_k, \dots, \alpha_{r-1}, X_1, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_{s-1}))$$

donde el símbolo $\hat{}$ sobre un elemento significa la omisión del mismo.

De esta forma, al llevar a cabo una contracción, los índices utilizados de la contracción desaparecen del tensor original. Así, podemos obtener tensores de orden menor e, incluso, magnitudes escalares a partir de los tensores. Veamos un ejemplo sobre cuántos tensores diferentes se pueden obtener a partir de realizar la contracción de otro tensor:

Ejemplo 2.3.7. Dado el tensor $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}^{2,2}(M)$, que podemos representar con notación indexa como T_{kl}^{ij} , podemos obtener otros tensores de orden menor realizando una contracción de índices. La primera contracción que podemos hacer es a partir de la igualación de los índices i y k :

$$T_{ul}^{uj} = T_{1l}^{1j} + T_{2l}^{2j} + T_{3l}^{3j} + \dots + T_{nl}^{nj} = T_l^j$$

También, podemos realizar la contracción igualando los índices internos:

$$T_{ul}^{iu} = T_{1l}^{i1} + T_{2l}^{i2} + T_{3l}^{i3} + \cdots + T_{nl}^{in} = T_l^i$$

O bien con los dos índices externos:

$$T_{ku}^{uj} = T_{k1}^{1j} + T_{k2}^{2j} + T_{k3}^{3j} + \cdots + T_{kn}^{nj} = T_k^j$$

La cuarta contracción podemos llevarla a cabo igualado los índices j y l :

$$T_{ku}^{iu} = T_{k1}^{i1} + T_{k2}^{i2} + T_{k3}^{i3} + \cdots + T_{kn}^{in} = T_k^i$$

Así, hemos obtenido cuatro tensores diferentes de orden $(1, 1)$. Sin embargo, si aplicamos doble contracción sobre el tensor \mathbf{T} obtenemos en todos los casos los tensores T_{uv}^{uv} y T_{vu}^{uv} . Como en ambos tensores tenemos dos índices iguales, al volver aplicar la contracción nos produce dos tensores de orden cero diferentes, es decir, dos escalares. Por lo tanto, dado el tensor T_{kl}^{ij} hemos podido obtener 6 tensores diferentes a partir de realizar contracciones.

Derivada de Lie

Dado un campo vectorial, $X \in \mathfrak{X}(M)$, sobre una variedad diferenciable M , sabemos que éste define una congruencia de curvas, $\gamma^X(\lambda)$, a través de la ecuación diferencial $X^i(\gamma^X(\lambda)) = \frac{d\gamma^{X^i(\lambda)}}{d\lambda}$. Como es bien conocido, estas son las *curvas integrales o líneas de campo* del campo vectorial X .

La idea de la *derivada de Lie* es poder evaluar cómo varía una magnitud tensorial a lo largo de un campo vectorial, X , es decir, calcular la derivada direccional en la dirección del campo X , o mejor dicho, la derivada a lo largo de sus curvas integrales. A partir de esa idea intuitiva, obtenemos la definición formal de la *derivada de Lie*:

Definición 2.3.8. Sea $T \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$ una magnitud tensorial definida sobre la variedad diferenciable M y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre la misma variedad. Dicho campo vectorial define un flujo sobre M que viene dado por la función $F^t : D \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. De esta forma, definiremos la **derivada de Lie** del tensor T a lo largo del campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ como el límite:

$$\mathcal{L}_X T = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (F^{-t})^* T \equiv (\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F^{-t})_{F_p(t)}^* T_{F_p(t)} - T_p}{t} \in \mathcal{T}_p^{r,s}(M)$$

Observación. 1. La *derivada de Lie* $\mathcal{L}_X : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{r,s}(M)$ es una derivación de orden cero, por lo que verifica:

$$\mathcal{L}_X (T \otimes R) = (\mathcal{L}_X T) \otimes R + T \otimes (\mathcal{L}_X R)$$

2. La *derivada de Lie* de funciones diferenciables se define de forma simple como $\mathcal{L}_X f = X(f)$.

3. La *derivada de Lie* de un campo vectorial Y respecto al campo X viene dada por el campo vectorial que verifica la siguiente expresión:

$$[X, Y] := XY - YX \equiv [X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M),$$

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

que se conoce como **corchete de Lie**. La *derivada de Lie* entre campos vectoriales tiene una interpretación gráfica muy interesante: dados dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ podemos definir sus flujos como F_X^t, F_Y^t respectivamente. En tal caso, la derivada $[X, Y] := \mathcal{L}_X Y$ mide la diferencia entre el camino $F_t^X \circ F_t^Y$ y el camino $F_t^Y \circ F_t^X$ en el límite cuando $t \rightarrow 0$.

Véamos ahora algunos ejemplos de cálculo de la *derivada de Lie* de diferentes objetos matemáticos para entender mejor esta generalización de la derivada direccional:

Ejemplos 2.3.9. 1. **Derivada de Lie de un campo vectorial.** Dada la variedad diferenciable \mathbb{R}^{3+1} , consideremos los campos vectoriales

$$X = \frac{\partial}{\partial x^0}$$

$$Y = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{3+1})$$

de forma que el flujo del campo X viene dado por la aplicación $F^t : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3+1}$ tal que $F(t, x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x^1, x^2, x^3)$. Por lo tanto, el *pullback* de Y por el flujo de X vendría dado por $F^{t*}(Y) = Y^t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y tendría las mismas coordenadas que el campo Y . Así, al derivar respecto de la variable t y evaluando para $t = 0$ simplemente obtendríamos:

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{\partial Y^t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial Y^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Es fácil probar que, efectivamente, evaluando el *corchete de Lie* de los campos, $[X, Y]$, obtendríamos el mismo resultado $[X, Y] = \frac{\partial Y^t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial Y^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$, tal y como era de esperar.

2. **Derivada de Lie de una forma diferencial.** Consideremos \mathbb{R}^4 como una variable diferenciable donde tenemos definido el campo vectorial

$$X = x^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$$

cuyo flujo viene dado por la función $F^t(t, x^0, x^1, x^2, x^3) = e^t(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Consideremos también la 4-forma diferencial sobre la variedad \mathbb{R}^4

$$\alpha = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega^4(\mathbb{R}^4)$$

Aplicando la definición de *derivada de Lie* tenemos que $\mathcal{L}_X \alpha = \frac{d}{dt}|_{t=0} F^{t*}(\alpha)$. Entonces, necesitamos obtener el *pullback* de α por F^t , que viene dado por:

$$F^{t*}(\alpha) = (e^t dx^0) \wedge (e^t dx^1) \wedge (e^t dx^2) \wedge (e^t dx^3) = (e^t)^4 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

por lo tanto, derivando esta función respecto de la variable t y evaluando para $t = 0$ obtendríamos que la *derivada de Lie* viene dada por:

$$\mathcal{L}_X g = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F^{t*}(g) = (4e^{4t} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)\big|_{t=0} = 4\alpha$$

3. **Derivada de Lie de un campo tensorial.** Sea $M = \mathbb{R}^3$ la variedad diferenciable sobre la que definimos el campo vectorial

$$X = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$$

cuyo flujo viene dado por la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$F : (t, x, y, z) \mapsto (x, y \cos t - z \sin t, y \sin t + z \cos t)$$

y el $(0, 2)$ -campo tensorial $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz \in \mathfrak{T}^{2,2}(M)$. Se puede comprobar fácilmente que el *pullback* de g por F^t es

$$F^{t*}(g) = dx \otimes dx + \cos(2t)(dy \otimes dy - dz \otimes dz) - \sin(2t)(dy \otimes dz + dz \otimes dy)$$

Con estos cálculos, podemos obtener la *derivada de Lie* por definición, $\mathcal{L}_X g = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} F^{t*}(g)$. Calculemos primero la derivada respecto de la variable t :

$$\frac{d}{dt} F^{t*}(g) = -2\sin(2t)(dy \otimes dy - dz \otimes dz) + 2\cos(2t)(dy \otimes dz + dz \otimes dy)$$

y evaluando para $t = 0$, obtenemos que $\mathcal{L}_X g = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} F^{t*}(g) = -2(dy \otimes dz + dz \otimes dy)$.

Derivada interior

La *derivada interior* es una derivación de grado -1 sobre el álgebra exterior de las formas diferenciales sobre una variedad diferenciable. Veamos la definición rigurosa:

Definición 2.3.10. Sea M una variedad diferenciable sobre la que consideramos el conjunto de las formas diferenciales de orden k , $\Omega^k(M)$. La ***derivada interior*** se define como la *contracción* de una forma diferencial con un campo vectorial. Entonces, si consideramos el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ podemos definir la *derivada interior* de la forma $\omega \in \Omega^k(M)$ respecto X como la aplicación $\iota_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ tal que:

$$(\iota_X \omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

Efectivamente el grado de la derivación es -1 pues dada una forma diferencial de orden k , al aplicarle la derivada interior obtenemos una forma de orden $k-1$. Además, por tratarse de una derivación está claro que $(\iota_X)^2 = 0$ y ha de verificar:

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge (\iota_X \beta)$$

Para terminar de entender la *derivada interior* veamos un ejemplo de aplicación:

Ejemplo 2.3.11. Sea la variedad diferenciable $M = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ sobre la que consideramos las coordenadas canónicas. Sobre dicha variedad podemos definir el siguiente campo vectorial y la 1-forma diferencial:

$$X = x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^4} \in \mathfrak{X}(M)$$

$$\Omega = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega^4(M)$$

$$\sigma = x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - x^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - x^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^3(M)$$

A modo de ejemplo podemos calcular $\iota_X \Omega$ y $\iota_X \sigma$. Para calcularlo, debemos tener en cuenta que la *derivada interior* verifica la *regla de Leibniz* escrita anteriormente y, además que $\iota_X \sigma = \iota_{\sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \sigma = \sum_i \iota_{x^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \sigma$, por lo tendríamos:

$$\begin{aligned} \iota_X \Omega &= \iota_X(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \iota_X(dx^0) \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \iota_X(dx^1) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\ &\iota_X(dx^2) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \iota_X(dx^3) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - x^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad - x^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \sigma \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\iota_X(dx^i) = \iota_{x^i \frac{\partial}{\partial x^i}}(dx^i) = x^i$. Para el caso de σ necesitaríamos calcular cada término:

$$\begin{aligned} \iota_{x^0 \frac{\partial}{\partial x^0}} \sigma &= -x^0(x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2) \\ \iota_{x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}} \sigma &= x^1(x^0 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^0 \wedge dx^3 + x^3 dx^0 \wedge dx^2) \\ \iota_{x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}} \sigma &= -x^2(x^0 dx^1 \wedge dx^3 - x^1 dx^0 \wedge dx^3 + x^3 dx^0 \wedge dx^1) \\ \iota_{x^3 \frac{\partial}{\partial x^3}} \sigma &= -x^3(x^0 dx^2 \wedge dx^1 - x^0 + 1 dx^0 \wedge dx^2 + x^2 dx^0 \wedge dx^1) \end{aligned}$$

y sumando todos estos términos obtenemos que el resultado es $\iota_X \sigma = 0$.

Derivada exterior

En este caso, la *derivada exterior* es una derivación de grado 1 sobre el álgebra exterior de las formas diferenciales sobre una variedad diferenciable. Para definir dicha derivada, comencemos a definir el morfismo d para el caso en que el grado sea $k = 0$. En este caso, la aplicación vendría dada por $d : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, de forma que, dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, df sería su forma diferencial, conocida por el *cálculo diferencial*. Sabemos que si fijamos una carta local con sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}_\alpha$, la diferencial de la función se podría escribir como la 1-forma diferencial $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

La idea ahora es generalizar este concepto para formas diferenciales de grado k . Para ello, utilizaremos una definición axiomática de la *derivada exterior*:

Definición 2.3.12. Dada la variedad diferenciable M , diremos que la *derivada exterior* es la *única* aplicación \mathbb{R} -lineal que envía k -formas diferenciales a $(k + 1)$ -formas diferenciales satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. df es exactamente la *diferencial* de la función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, que hemos visto anteriormente.
2. Se verifica que $d(df) = 0$ para cualquier función diferenciable.
3. La aplicación d verifica la *regla de Leibniz*, de forma que $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k(\alpha \wedge d\beta)$ donde $\alpha \in \Omega^k(M)$ es una k -forma diferencial. Esta propiedad equivale a exigir que la aplicación d sea una *antiderivación* de grado 1 sobre las formas diferenciales.

Esta definición axiomática nos da una forma sistemática de verificar si una aplicación entre formas diferenciales se trata de una *derivada exterior*. Sin embargo, no somos capaces a través de ella de entender físicamente en qué consiste esta derivada. Por eso, veamos una definición *esquemática* y poco rigurosa que nos permita entender mejor en qué consiste la *derivada exterior*. Para ello, necesitaremos definir una aplicación: el *operador de frontera*, ∂_{k+1} .

Definición 2.3.13. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $N \subset M$ una subvariedad de M de dimensión $k+1$. Diremos que el **operador de frontera**, ∂_{k+1} , es la aplicación que dada una subvariedad N de dimensión $k+1$ retorna la subvariedad de dimensión k correspondiente a la frontera topológica $\partial N \subset M$, es decir, $\partial_{k+1} : N \rightarrow \partial N$.

Entonces, la *derivada exterior* $d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ se puede considerar en este sentido como la aplicación “*dual*” del *operador de frontera*, puesto que $d_k \beta(N) = \beta(\partial_{k+1} N)$.

Observación. 1. Pensando la *derivada exterior* como el dual del operador de frontera, podemos obtener dos propiedades generales importantes: $d^2 = 0$, puesto que la frontera de una variedad no tiene frontera, y $d_n = 0$, donde n es la dimensión de la variedad donde tenemos definidas las formas diferenciales, puesto que no puede existir una subvariedad de mayor dimensión a la total.

2. Si una k -forma puede verse como una forma de medir el flujo a través de un paralelepípedo de dimensión k , entonces su *derivada exterior* puede ser pensada como una medida del flujo a través de la frontera de un paralelepípedo de dimensión $k+1$.
3. Si trabajamos con formas diferenciales de cualquier orden sobre una variedad M , se cumple la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_f \beta = f \mathcal{L}_X \beta + df \wedge \iota_X \beta$$

para cualquier $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Además, sobre las formas diferenciales existe una expresión que relaciona la *derivada exterior* con la *derivada de Lie* y el *producto interior*, denominada **fórmula mágica de Cartan**:

$$\mathcal{L}_X = d \iota_X + \iota_X d$$

4. La *derivada exterior* es una aplicación que conmuta con los *pullback* de funciones y con la *derivada de Lie*, por lo que tenemos que en general se cumple $df^* = f^* d$ y $\mathcal{L}_X d = d \mathcal{L}_X$.

Para clarificar el cálculo de la derivada exterior, retomemos ahora el ejemplo del apartado anterior, en el que hemos calculado la *derivada de Lie* de una forma diferencial por definición. En este caso, hallaremos dicha derivada aplicando las propiedades de la derivada exterior que hemos visto y mediante la *fórmula mágica de Cartan*. Veámoslo:

Ejemplo 2.3.14. Sobre la variedad diferenciable $M = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, consideraremos la función diferenciable, el campo vectorial y las formas diferenciables siguientes:

$$r = ((x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

$$X = x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^4} \in \mathfrak{X}(M)$$

$$\omega = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega^4(M)$$

$$\sigma = x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - x^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - x^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^3(M)$$

Si queremos calcular la derivada exterior de σ , $d\sigma$, debemos tener en cuenta que, en general, $d^2 = 0$ y, por lo tanto, $d(f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$. Además, debemos recordar que el producto exterior de dos formas diferenciales es anticonmutativo. De esta forma, tenemos que:

$$d\sigma = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - dx^1 \wedge dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - dx^3 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = 4\omega$$

Por otro lado, para calcular el diferencial de la función, es decir, su derivada exterior, dr , tendremos en cuenta que $d(r^2) = 2rdr$, puesto que $d(r^2)$ se calcula fácilmente de la siguiente manera:

$$d(r^2) = 2(x^0 dx^0 + x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) = 2rdr \Rightarrow dr = \frac{x^0 dx^0 + x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3}{r}$$

Teniendo este último cálculo en cuenta, vemos que la forma diferencial $\omega \in \Omega^4(M)$ puede escribirse fácilmente como $\omega = \frac{dr}{r} \wedge \sigma$. Así, vemos que tanto $d\sigma$ como $dr \wedge \sigma$ son dos 4-formas diferenciales que son múltiplos de ω , puesto que ω es una *forma de volumen* sobre M . Es fácil ver que se trata de una *forma de volumen* ya que su orden es $4 = \dim(M)$ y, además, no se anula para ningún punto de M , es decir, para cualquier $p \in M$, tenemos que ω_p es una base del espacio producto exterior $T_p^*(M) \wedge T_p^*(M) \wedge T_p^*(M) \wedge T_p^*(M) = \Lambda^4 T_p^*(M)$.

Por último, veremos cómo calcular de manera alternativa (*sin usar la definición*) la *derivada de Lie* de la forma diferencial σ respecto al campo vectorial X . Primero, usaremos que la *derivada de Lie* conmuta con la *derivada exterior*, tenemos que $\mathcal{L}_X(dx^i) = d(\mathcal{L}_X x^i)$ y como $\mathcal{L}_X(x^i) = \mathcal{L}_{x^i \frac{\partial}{\partial x^i}}(x^i) = x^i$, tenemos que $\mathcal{L}_X(dx^i) = dx^i$. Por lo tanto, para cada sumando de σ tendremos:

$$\mathcal{L}_X(x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \mathcal{L}_X(x^0) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + x^0 \mathcal{L}_X(dx^1) \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$$

$$x^0 dx^1 \wedge \mathcal{L}_X(dx^2) \wedge dx^3 + x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge \mathcal{L}_X(dx^3) = 4x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Repitiendo este procedimiento para todos los sumandos y calculando la suma de todos ellos, obtenemos que, efectivamente, $\mathcal{L}_X \sigma = 4\sigma$. Otra forma para calcular la *derivada de Lie* sería

usar la *fórmula mágica de Cartan*, $\mathcal{L}_X = d\iota_X + \iota_X d$. Teniendo en cuenta, de los cálculos anteriores, que $\iota_X \sigma = 0$, $\iota_X \omega = \sigma$ y $d\sigma = 4\omega$, sustituyendo es fácil ver que:

$$\mathcal{L}_V \sigma = \iota_V(d\sigma) + d(\iota_V \sigma) = 4\iota_V \omega + d0 = 4\sigma.$$

tal y como era de esperar.

Derivada exterior covariante y conexión

En las secciones anteriores, hemos visto propiedades y operadores diferentes sobre los fibrados vectoriales de una variedad diferenciable cualquiera. De esta forma, dado un fibrado vectorial, hemos aprendido a trabajar con elementos de una misma fibra, pudiendo definir propiedades geométricas sobre ella de forma análoga a la que lo haríamos sobre un espacio vectorial. Sin embargo, no tenemos ninguna manera de relacionar objetos que pertenecen a fibras diferentes.

Por ejemplo, si consideramos el fibrado tangente de una variedad diferenciable M de dimensión n , TM , tenemos que las fibras serían los espacios tangentes a cada punto, $T_p M \forall p \in M$, que se pueden identificar con \mathbb{R}^n . En este caso, si consideramos dos puntos $p, q \in M$, sabemos perfectamente cómo sumar vectores dentro del espacio tangente $T_p M$ y dentro del espacio $T_q M$, pero no sabríamos cómo poder relacionar vectores $v \in T_p M$ y $u \in T_q M$ que pertenezcan a diferentes espacios tangentes.

Antes de comenzar a estudiar el aparente problema, podríamos preguntarnos si realmente es necesario trabajar con elementos pertenecientes a diferentes fibras. Si pensamos un poco, no es nada descabellado querer medir cómo varía una sección de un fibrado vectorial de una variedad M al movernos por la variedad. En este caso, recurriríamos sin pensarlo a la derivada para ser capaces de medir dicha variación. Sin embargo, recurriendo a la sencilla definición de derivada ya nos encontramos con el primer problema: para poder hallar la derivada de la sección necesitamos conocer no solo el valor de la sección en un punto sino también el valor de la sección en un punto infinitesimalmente cercano (*pero diferente*), lo que nos dará elementos de fibras diferentes que deberemos saber restar. Por lo tanto, solo para calcular una simple derivada, ya tenemos la necesidad de aprender a relacionar elementos que no sean de la misma fibra con el objetivo de ser capaces de “mover” la geometría local de las fibras de un fibrado vectorial.

En conclusión, necesitaremos tener una forma de “conectar” los vectores de diferentes fibras. Para ello, necesitaremos definir la noción de *transporte paralelo* a lo largo de una curva:

Definición 2.3.15. Dada una variedad diferenciable M , sobre la que tenemos definida el fibrado vectorial (E, M, π, F) , decimos que el **transporte paralelo** a lo largo de una curva diferenciable $\gamma : I \rightarrow M$ definida sobre la variedad desde el punto $\gamma(t_0) = p \in M$ hasta el punto $\gamma(t) = q_t \in M$ viene dado por el isomorfismo:

$$P_\gamma : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t)}$$

Este isomorfismo nos permite “transportar” los vectores de la fibra del punto $\gamma(t_0)$ con los vectores de la fibra de $\gamma(t)$ con el fin de poder trabajar con ellos como si en un mismo espacio

vectorial se encontraran. Es fácil ver que esta aplicación es lineal y biyectiva y, además, depende directamente de la curva γ que nos indica cómo transportar los vectores de una fibra a otra. En la siguiente imagen podemos ver un ejemplo de cómo se transporta paralelamente un vector $v \in TM$ (imagen de la sección $V \in \mathfrak{X}(M)$) a lo largo de una curva γ , que podemos pensar como la curva integral del campo vectorial $U \in \mathfrak{X}(M)$: De esta forma, una vez capaces de trabajar

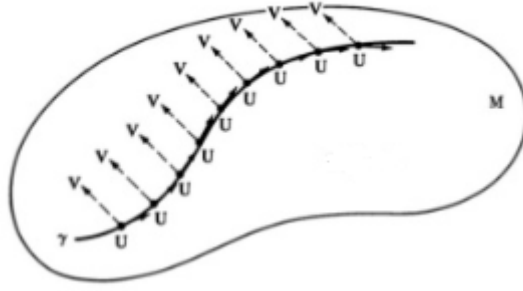


Figura 7: Transporte paralelo a lo largo de la curva γ [Fuente: [27]]

con elementos de fibras diferentes, podemos generalizar el concepto de *derivada direccional*. Para ello, definiremos la *derivada direccional de una sección* como:

Definición 2.3.16. Dado un fibrado vectorial (E, M, π, F) , consideramos el campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ y la sección $s \in \Gamma(E)$. Entonces, la **derivada direccional de la sección** s respecto de la dirección dada por el campo V viene dada por el *transporte paralelo infinitesimal*:

$$(\nabla_V s)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(P_\gamma)^{-1}(s_{\gamma(t)}) - s_p}{t}$$

donde la curva γ respecto la que se realiza el transporte paralelo es cualquier curva tal que $\gamma(0) = p \in M$ y $\dot{\gamma}(0) = V_p$.

Podemos intentar entender en qué consiste geoméricamente esta definición de *derivada direccional*. Dada una dirección y una sección definida a lo largo de esta dirección, para poder realizar la *derivada direccional*, se transporta paralelamente la sección s en el punto $\gamma(t)$ hasta el punto $p \in M$ con el fin de poder restar vectores de la misma fibra y ejecutar la derivada ordinaria mediante el cociente infinitesimal. Por lo tanto, lo que obtenemos al realizar esta derivada es la **desviación** de la sección $s \in \Gamma(E)$ con respecto el transporte paralelo a lo largo de la dirección dada. Esto nos permite definir una aplicación sobre el fibrado vectorial, que llamaremos *conexión*, que dada una dirección y una sección, nos dará la desviación de la sección con respecto el transporte paralelo a lo largo de dicha dirección:

Definición 2.3.17. Dado un fibrado vectorial (E, M, π, F) , diremos que una **conexión** sobre $E \rightarrow M$ es la aplicación bilineal $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ tal que:

$$\nabla_{fV}s = f\nabla_V s \quad \nabla_V(fs) = V(f)s + f\nabla_V s$$

para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, todo campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ y toda sección $s \in \Gamma(E)$.

Otra forma de abordar el problema podría ser pensar en el proceso opuesto: conociendo cómo derivar direccionalmente, obtener vía integración el transporte paralelo. La idea sería, conocida cuál es la desviación que experimenta la sección respecto a una dirección, obtener por integración la curva que nos indica cómo se realiza el transporte paralelo. Esta forma de entender esta *derivada direccional* es totalmente equivalente y nos será más conveniente para trabajar en la teoría de la Relatividad General. Así, podemos definir el mapa “dual” de la *conexión*, que llamaremos la *derivada exterior covariante*:

Definición 2.3.18. Dado un fibrado vectorial (E, M, π, F) , la ***derivada exterior covariante*** es la aplicación $d_{\nabla} : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$ tal que, dada una sección $s \in \Gamma(E)$ obtenemos la 1-forma diferencial $d_{\nabla}s$ tal que:

$$d_{\nabla}s : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(E)$$

$$V \longmapsto (d_{\nabla}s)(V) = \nabla_V s$$

Observación. 1. En la definición, hemos considerado el conjunto $\Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$, es decir, el conjunto de 1-formas diferenciales con valores en E . Esto quiere decir que los coeficientes de la 1-forma diferencial, en lugar de ser funciones como hasta ahora estamos acostumbrados, serán secciones de E . Esta definición se puede generalizar para cualquier orden de forma que $\Omega^k(E) := \Omega^k(M) \otimes \Gamma(E)$ es el conjunto de las formas diferenciales con coeficientes en E . Obsérvese que para las 0-formas diferenciales $\Omega^0(E) := \Gamma(E)$ recuperamos el conjunto de secciones de E .

2. Es posible generalizar de forma natural la *derivada exterior covariante* de formas de cualquier orden: $d_{\nabla} : \Omega^k(E) \rightarrow \Omega^{k+1}(E)$.
3. La *derivada exterior covariante* es efectivamente una derivada, pues es fácil comprobar que verifica la *Regla de Leibniz*:

$$d_{\nabla}(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d_{\nabla}s \in \Omega^{k+1}(E), \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M), s \in \Gamma(E)$$

4. Si consideramos el fibrado vectorial trivial, cuyas secciones son las funciones diferenciables, con la conexión trivial obtenemos la derivada exterior que ya hemos estudiado en la sección anterior.

Por lo tanto, hemos visto cómo la desviación que sufre una sección a lo largo de una dirección, que es una característica de carácter geométrico, nos lleva a definir dos nuevos operadores equivalentes: la *conexión* y la *derivada exterior covariante*. Para intentar clarificar esta idea, veamos el caso sencillo en el que la variedad es \mathbb{R}^n y las secciones son los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$. En este caso, podemos considerar n campos vectoriales, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ que forman una base de $\mathfrak{X}(M)$ y que en cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ forman una base vectorial $\{e_1(p), e_2(p), \dots, e_n(p)\}$ de \mathbb{R}^n que puede depender (o no) del punto. Así, cualquier campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ se puede expresar en términos de la base anterior como $V = V^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ y en cada punto $p \in \mathbb{R}^n$, tendremos que el vector V_p puede expresarse como $V_p = V_p^k e_k(p)$, donde V_p^k son las componentes del vector $V_p \in T_p \mathbb{R}^n$ en la base $\{e_k(p)\}_k$.

En \mathbb{R}^n estamos acostumbrados a trabajar con las *coordenadas cartesianas*, con la que los vectores tangentes a las curvas coordenadas, que usaremos como vectores de la base, no dependen del

punto $p \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, tenemos la misma base vectorial para todos los puntos de \mathbb{R}^n , pues estos no sufren ninguna desviación a lo largo de ninguna dirección. Así, los espacios tangentes en todos los puntos de la variedad son isomorfos y presentan las mismas coordenadas, lo que nos permite calcular la derivada en un punto, pues podemos restar vectores de diferentes espacios tangentes. Esto hace que tengamos una operación “natural” para derivar campos vectoriales en \mathbb{R}^n respecto a las direcciones tangentes a las coordenadas cartesianas:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} V = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} V^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial V_k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

que no es más que la definición usual de derivada direccional (parcial al tratarse de las direcciones de los ejes coordenados) del campo definida en el cálculo diferencial.

Sin embargo, esto en general no es así ya que los vectores tangentes a las curvas coordenadas pueden depender del punto $p \in \mathbb{R}^n$ en el que nos encontremos, por lo que los espacios tangentes no serán isomorfos y será imposible trabajar con elementos de diferentes espacios tangentes. Es por este motivo que necesitamos “conectar” los dos espacios tangentes para poder derivar y es donde entra en juego la nueva definición de *derivada covariante* anterior, dada por la *conexión* del espacio. Así, si queremos evaluar la derivada exterior covariante, hemos de considerar también la variación de orientación de la base vectorial al pasar de un punto a otro. Si consideramos una base general que dependa del punto, $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}_j$, tal que el campo $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ se puede expresar como $\tilde{V}^k \frac{\partial}{\partial y^k}$, tenemos que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} V = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \tilde{V}^k \frac{\partial}{\partial y^k} = \frac{\partial \tilde{V}^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^k} + \tilde{V}^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

donde hemos usado que la derivada exterior covariante verifica la regla de Leibniz. En este caso, existe un término adicional, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^k}$, donde se recoge la información de cómo cambia la base vectorial al cambiar de punto, es decir, qué desviación experimenta la base vectorial al recorrer las curvas coordenadas. En el caso de las coordenadas cartesianas, teníamos que el término $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$ puesto que la base asociada a estas coordenadas no se desvía a lo largo de ninguna de las curvas coordenadas.

En resumen, hemos visto que cuando usamos las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^n , las curvas coordenadas son líneas rectas paralelas a los ejes coordenados y en cada punto la base vectorial es la misma. Por el contrario, en general si usamos unas coordenadas cualesquiera los vectores tangentes a las curvas coordenadas asociadas (que usamos como base vectorial) cambiarán de un punto a otro, pues sufren una desviación al moverse a lo largo de una cierta dirección. Por lo tanto, a la hora de derivar necesitaremos también ser capaces de medir la variación de dicha base al moverse a lo largo de una dirección y, por lo tanto, cambiar de punto. Además, al cambiar esta base vectorial, los espacios tangentes dejan de ser isomorfos y nos encontramos que no es posible trabajar con vectores que viven en diferentes espacios. Para poder solucionar este inconveniente, es necesario definir una *conexión* que nos permita saber cómo trabajar con vectores de diferentes espacios tangentes y así poder conocer cómo se desvían los vectores

de la base a través de la derivada. En el caso de \mathbb{R}^n y las secciones $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, donde podemos trabajar con la base $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}_i$, podemos definir localmente dicha conexión a través de un conjunto de coeficientes, que vienen dados por la siguiente caracterización:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} := \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}$$

Este conjunto de coeficientes se denominan **símbolos de Christoffel** y definen localmente la conexión. Estos coeficientes no son más que las componentes del campo vectorial que da la desviación del campo V a lo largo de las curvas coordenadas de la base $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}_i$ en esta misma base. Por lo tanto, uniendo los dos resultados anteriores y usando el *convenio de sumación de Einstein* como llevamos haciendo en todo el desarrollo tenemos que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} V = \left(\frac{\partial \tilde{V}^k}{\partial y^i} + \Gamma_{ij}^k \tilde{V}^j \right) \frac{\partial}{\partial y^k}$$

donde podemos ver que con esta nueva “definición” de derivada aparece un nuevo término para medir la desviación de la base. Todo este razonamiento puede extenderse a cualquier variedad diferenciable M . Veamos cómo generalizar la definición de los *símbolos de Christoffel* para una variedad cualquiera dada su carta local:

Definición 2.3.19. Sea M una variedad diferenciable y sea (U, ϕ) una carta local de M . Consideremos los campos vectoriales coordenados, $\frac{\partial}{\partial x^i}$, que definen una base sobre el espacio $\mathfrak{X}(M)$. Entonces, podemos escribir:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

donde a las componentes $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se les denomina **símbolos de Christoffel** de la conexión ∇ relativos a la base $\frac{\partial}{\partial x^i}$ (o la carta (U, ϕ)) y permiten definir la conexión localmente.

Observación. Dada una base cualquiera, siempre es posible encontrar una conexión que verifique que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, es decir, que los vectores de la base no cambien su orientación al moverse a lo largo de diferentes curvas. Esta conexión recibe el nombre de **conexión trivial** y es el equivalente al concepto de *formas cerradas* para la integral de formas, que permite que la misma no dependa del camino escogido. En este caso, cuando una conexión es trivial tenemos que el transporte paralelo no depende de la curva γ puesto que los vectores no sufren desviación.

Antes de pasar al caso general y ver la definición de los símbolos de Christoffel para la derivada covariante de una sección cualquiera (no necesariamente un campo vectorial), veamos ahora algunos ejemplos con el objetivo de afianzar y aclarar las ideas que hemos visto sobre conexión, derivada covariante y los símbolos de Christoffel:

Ejemplos 2.3.20. 1. **Símbolos de Christoffel.** Empezaremos con un ejemplo de cálculo de símbolos de Christoffel para entender mejor su definición. Consideremos la variedad $M = \mathbb{R}^2$ con su **conexión estándar**, es decir, aquella conexión donde los campos vectoriales coordenados cartesianos son paralelos y no cambian según el punto $p \in \mathbb{R}^2$. En esta conexión, tenemos que:

$$\nabla_v \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \nabla_v \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \forall v \in T\mathbb{R}^2$$

De esta forma, los **símbolos de Christoffel** de la conexión asociados a la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\}$ vendrían dados por $\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j, k \in \{1, 2\}$.

El objetivo de este ejemplo es estudiar la misma conexión, pero usando otra base que sí que dependa del punto. Por eso, calcularemos los *símbolos de Christoffel* asociados a la base $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}\}$, puesto que así tendremos definida la conexión localmente. Por lo tanto, tendremos que calcular las cuatro siguientes derivadas covariantes $\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \phi}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi}$. Para ello, lo primero que haremos será expresar los vectores de la nueva base (asociada a las coordenadas polares) en función de la base cartesiana, que es a través de la cual conocemos la conexión, teniendo en cuenta que el cambio de coordenadas viene dado por $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$. Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

Así, teniendo en cuenta que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$ y usando las propiedades de la derivada covariante tenemos:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = \nabla_{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial r} + y \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial r}) = 0$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial r} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} + 0 + \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} + 0 \end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial r} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} + 0 + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de este cálculo tenemos que $\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^\phi = 0$. Análogamente, podemos calcular la derivada covariante $\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \phi}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \phi} &= \nabla_{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial \phi} + y \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial \phi}) = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial \phi} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0 + 0 + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} + 0 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial \phi} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) = -1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 + 0 + 0 = -\frac{\partial}{\partial x}$$

De este resultado tenemos pues que $\Gamma_{r\phi}^r = 0$ y $\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}$. Seguimos con el cálculo de derivadas covariantes y obtenemos ahora $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial r}$ usando los resultados anteriores:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial r} = \nabla_{-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial r} = -y \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial r} + x \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Así, tenemos que $\Gamma_{\phi r}^r = 0$ mientras que $\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$. Por último, tenemos que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} = \nabla_{-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial \phi} = -y \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial \phi} + x \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial \phi} = -r \frac{\partial}{\partial r}$$

Por lo tanto, $\Gamma_{\phi\phi}^r = -r$ mientras que $\Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0$. En resumen, tenemos que la conexión estándar de \mathbb{R}^2 en las coordenadas polares, cuya base asociada depende del punto, viene definida por los siguientes *símbolos*:

$$\Gamma_{rr}^r = 0, \Gamma_{rr}^\phi = 0$$

$$\Gamma_{r\phi}^r = \Gamma_{\phi r}^r = 0, \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r, \Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0$$

que nos permite verificar que, efectivamente, los vectores de la base se desvían al desplazarse a lo largo de las curvas coordenadas.

2. **Derivada covariante de un campo vectorial.** Consideremos la variedad diferenciable $M = \mathbb{R}^2$ con la conexión que viene definida por los siguientes *símbolos de Christoffel* asociados a las coordenadas cartesianas: $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1$ y todos los demás nulos. Usando la definición de los símbolos, podemos obtener las derivadas covariantes a partir de la conexión:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = 0, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

Por lo tanto, cuando el campo $\frac{\partial}{\partial y}$ se desplaza a lo largo de la dirección definida por el campo $\frac{\partial}{\partial x}$ sufre una desviación que viene dada por el campo $\frac{\partial}{\partial x}$, de la misma manera que cuando el campo $\frac{\partial}{\partial x}$ se desplaza a lo largo de la dirección asociada al campo $\frac{\partial}{\partial y}$. Esto nos permite calcular la derivada covariante de un campo vectorial cualquiera $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Por

ejemplo, si $V = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$, podemos conocer cómo se desvía dicho campo V cuando se mueve a lo largo de sus curvas integrales calculando $\nabla_V V$:

$$\nabla_V V = \nabla_{x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}} V = x \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} V + y \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} V$$

Además, como $V = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$, tenemos que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + x \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} (\frac{\partial}{\partial x}) + 0 + y \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} (\frac{\partial}{\partial y}) = (y+1) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) = 0 + x \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (\frac{\partial}{\partial x}) + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} + y \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (\frac{\partial}{\partial y}) = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

Uniendo los dos resultados anteriores tenemos que:

$$\nabla_V V = x(y+1) \frac{\partial}{\partial x} + y(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}) = x(2y+1) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

3. **Derivada covariante de una 1-forma diferencial.** Para el cálculo de derivadas covariante de 1-formas diferenciales hemos de tener en cuenta que si trabajamos con los campos coordenados de la carta de la variedad entonces $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k = -\Gamma_{ij}^k dx^j$.

Consideremos ahora la variedad diferenciable $M = \mathbb{R}^2$, donde tenemos una conexión que viene definida por los *símbolos de Christoffel* asociados a las coordenadas cartesianas: $\Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = 1$ y todos los demás cero. La conexión nos permite conocer cómo se calculan las derivadas covariantes usando la definición de los símbolos:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} (dx) = -\Gamma_{xx}^x dx - \Gamma_{xy}^x dy = -dy$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} (dy) = -\Gamma_{xx}^y dx - \Gamma_{xy}^y dy = 0$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (dx) = -\Gamma_{yx}^x dx - \Gamma_{yy}^x dy = -dx$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (dy) = -\Gamma_{yx}^y dx - \Gamma_{yy}^y dy = 0$$

De esta forma, dada la conexión hemos “aprendido” cómo derivar covariantemente y podemos calcular $\nabla_V \omega$ donde $\omega = -ydx + xdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ es una 1-forma diferencial y $V = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ es el campo vectorial que nos da la dirección respecto la cual hacemos la derivada covariante. Veámoslo:

$$\nabla_V \omega = \nabla_{x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}} \omega = x \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \omega + y \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \omega$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \omega = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} (-ydx + xdy) = 0 - y \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} (dx) + 1 \cdot dy + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} (dy) = ydy + dy = (y+1)dy$$

y que además

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \omega = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (-ydx + xdy) = -1 \cdot dx - y \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (dx) + 0 + \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} (dy) = -dx + ydx = (y-1)dx$$

Por lo tanto:

$$\nabla_V \omega = x(y+1)dy + y(y-1)dx$$

4. **Derivada covariante de una k -forma diferencial.** Para generalizar la derivada covariante de una 1-forma diferencial, simplemente hemos de considerar que la derivada covariante también satisface la regla de Leibniz sobre el producto exterior de formas diferenciales. Entonces, si consideramos en el ejemplo anterior la 2-forma diferencial $\theta = dx \wedge dy$, podemos encontrar su derivada covariante respecto el mismo campo $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$:

$$\nabla_V(dx \wedge dy) = \nabla_V(dx) \wedge dy + dx \wedge \nabla_V(dy) = (-x dy - y dx) \wedge dy + dx \wedge 0 = -y dx \wedge dy = -y\theta$$

5. **Derivada covariante de un tensor.** Para el cálculo de derivadas covariantes de tensores únicamente debemos recordar que la derivada covariante también satisface la regla de Leibniz sobre el producto tensorial. Por lo tanto, como ya hemos aprendido a calcular derivadas covariantes de campos vectoriales y k -formas diferenciales, esto no supone ningún problema. Sigamos con la misma variedad \mathbb{R}^2 y la misma conexión que en los ejemplos anteriores. Entonces, podemos calcular la derivada covariante del tensor $T = \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy$ respecto el campo vectorial V :

$$\nabla_V\left(\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy\right) = \nabla_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \otimes dy + \frac{\partial}{\partial x} \otimes \nabla_V(dy)$$

y calculando

$$\nabla_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = x \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + y \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\nabla_V\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = x \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} + y \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

tenemos que $\nabla_V T = \nabla_V\left(\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy\right) = y \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy$.

Una vez aclarados los conceptos de conexión y derivada exterior covariante, podemos observar que hemos obtenido la definición de los *símbolos de Christoffel* a través de la derivada covariante de un campo vectorial a lo largo de una dirección. Esta idea puede ser generalizada para cualquier sección si consideramos el operador derivada exterior covariante d_∇ . La idea es que, de forma análoga a como lo hemos visto para campos vectoriales, existirá una base local de secciones $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ y una matriz (que dependerá de la base) de 1-formas diferenciales $\Gamma^\nabla = (\Gamma_j^k) \in gl_n(\Omega^1(M))$ tal que

$$d_\nabla s_j = \Gamma_j^k \otimes s_k \quad \text{donde} \quad \Gamma_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i \in \Omega^1(M)$$

Los coeficientes $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ son los *símbolos de Christoffel* que vimos anteriormente para el caso de los campos vectoriales, pero esta vez generalizado para cualquier sección de M . De la misma forma que lo hicimos para los campos, podemos calcular la derivada exterior covariante d_∇ de una sección cualquiera, $w = w^a s_a$, expresada en la base $\{s_a\}$ de secciones y aplicando la regla de Leibniz obtenemos:

$$d_\nabla(w^a s_a) = d_\nabla(w^a) s_a + w^a d_\nabla(s_a) = d(w^a) s_a + w^a d_\nabla(s_a) = dw^a s_a + w^a \Gamma_a^k \otimes s_k = (d + \Gamma^\nabla \wedge) w^a s_a$$

donde podemos ver que el operador derivada exterior covariante localmente se puede expresar como $d_\nabla = d + \Gamma^\nabla \wedge$.

Una vez expresado el operador derivada covariante exterior en función de la derivada exterior usual, d , podemos preguntarnos si dicho operador también verifica que $d_{\nabla}^2 = 0$ de la misma manera que $d^2 = 0$. La respuesta es que no y esto nos llevará a unos resultados geométricos interesantes. Dada una sección $w \in \Gamma(E)$, veamos qué obtenemos al aplicar el operador derivada covariante dos veces:

$$\begin{aligned} d_{\nabla}^2 w &= (d + A^{\nabla} \wedge)(d + A^{\nabla} \wedge)w = (d + A^{\nabla} \wedge)(dw + A^{\nabla} \wedge w) = d(dw) + d(A^{\nabla} \wedge w) + \\ &+ A^{\nabla} \wedge dw + A^{\nabla} \wedge (A^{\nabla} \wedge w) = 0 + d(A^{\nabla}) \wedge w + (-1)^{|A|} A^{\nabla} \wedge dw + A^{\nabla} \wedge dw + A^{\nabla} \wedge A^{\nabla} \wedge w = \\ &= dA^{\nabla} \wedge w + A^{\nabla} \wedge A^{\nabla} \wedge w = (dA^{\nabla} \wedge + A^{\nabla} \wedge A^{\nabla}) \wedge w := F^{\nabla} \wedge w \end{aligned}$$

donde hemos usado que $d^2 = 0$ y la regla de Leibniz para la derivada exterior. Por lo tanto, hemos visto que $d_{\nabla}^2 \neq 0$ y que podemos definir un nuevo operador que nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.3.21. Dado el fibrado vectorial (E, M, π, F) donde tenemos definida la conexión ∇ , diremos que la **forma de curvatura de la conexión** es la matriz de 2-formas diferenciales, $F^{\nabla} \in \Omega^2(M) \otimes \Gamma(E) \otimes \Gamma(E)^*$, que viene dada por:

$$F^{\nabla} = dA^{\nabla} + A^{\nabla} \wedge A^{\nabla} = dA^{\nabla} + (A^{\nabla})^2$$

Esta curvatura está asociada a la conexión y nos permite conocer cuál es la variación producida por el transporte paralelo de la conexión a lo largo de un pequeño cuadrado. En cierto sentido, la curvatura es la obstrucción que presenta la conexión para ser la *conexión trivial*, sin que las secciones presenten desviación al moverse a lo largo de una dirección cualquiera.

Entendida la idea geométrica de la forma diferencial F^{∇} , ahora nos podemos preguntar si se trata de la forma de curvatura es una forma cerrada, es decir, si $d(F^{\nabla}) = 0$. En general, esto no será así tal y como podemos ver:

$$\begin{aligned} dF^{\nabla} &= d(dA^{\nabla} + A^{\nabla} \wedge A^{\nabla}) = d^2 A^{\nabla} + dA^{\nabla} \wedge A^{\nabla} - A^{\nabla} \wedge dA^{\nabla} = (F^{\nabla} - A^{\nabla} \wedge A^{\nabla}) \wedge A^{\nabla} - \\ &- A^{\nabla} \wedge (F^{\nabla} - A^{\nabla} \wedge A^{\nabla}) = F^{\nabla} \wedge A^{\nabla} - A^{\nabla} \wedge A^{\nabla} \wedge A^{\nabla} - A^{\nabla} \wedge F^{\nabla} + A^{\nabla} \wedge A^{\nabla} \wedge A^{\nabla} = -[A, F] \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $dF = -[A, F]$, que se suele nombrar como la **identidad de Bianchi**. Sin embargo, es fácil comprobar que sí que se anula para la derivada covariante, $d_{\nabla} F^{\nabla} = 0$ y se obtiene la conocida como **segunda identidad de Bianchi**.

Además de preguntarnos si la forma de curvatura se trata de una forma cerrada, también podemos cuestionarnos lo siguiente. Trabajando con funciones diferenciales, $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, estamos acostumbrados a que el orden en el que ejecutamos las derivadas direccionales no importe, es decir, que el operador $\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x = 0$, donde ∂_j indica la derivada direccional respecto la dirección $j \in \mathbb{R}^n$. Sin embargo, no sabemos si es cierto que el operador $\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sea siempre cero. Por eso, tiene sentido que queramos comparar el conmutador $[\nabla_X, \nabla_Y]$ con la derivada covariante a lo largo de la dirección dada por $[X, Y]$, $\nabla_{[X, Y]}$ para saber si su diferencia también será cero. La respuesta es que en general no es así y podemos medir este hecho a través de la curvatura:

Definición 2.3.22. Dada una conexión ∇ sobre un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$, podemos definir el **tensor de curvatura o de Riemann** como la única aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineal tal que

$$\begin{aligned} Riem^\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ Riem^\nabla(X, Y, w) &= \nabla_X \nabla_Y w - \nabla_Y \nabla_X w - \nabla_{[X, Y]} w \end{aligned}$$

Este $(3, 1)$ -campo tensorial es muy importante y recoge toda la información sobre la curvatura de la variedad. Si se cumple que este tensor $Riem \equiv 0$, tendremos que no importa el orden de las derivadas covariantes y diremos que la conexión es **plana**. Este caso es equivalente al de las formas cerradas para la integral de formas en el siguiente sentido: si la conexión es plana, entonces el transporte paralelo no depende de la curva dentro de una misma *clase de homotopía*. Recordemos que dadas dos curvas $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow M$, $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M$ tal que tienen como origen y final los mismos puntos $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ diremos que pertenecen a la misma *clase de homotopía* si existe una aplicación $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\Gamma(0, t) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(1, t) = \gamma_1(t)$, $\forall t \in [0, 1]$. Por otra parte, es fácil comprobar que $d_\nabla^2 w(X, Y) = Riem^\nabla(X, Y, w)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall w \in \Gamma(E)$.

En lo que queda de esta sección, consideraremos que el fibrado vectorial con el que trabajamos es el fibrado tangente $E = TM$. En tal caso, el *tensor de curvatura de Ricci* sería una aplicación tal que $Riem^\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Aunque puede verse que dicho tensor recoge toda la información sobre la curvatura, es mucho más fácil y nos será más útil en la teoría de la Relatividad General trabajar con su traza: el *tensor de curvatura de Ricci*.

Definición 2.3.23. Dada una variedad diferenciable M , consideramos su fibrado tangente TM y las secciones del mismo, $\mathfrak{X}(M)$. Supongamos que tenemos definida sobre la variedad la conexión ∇ . Entonces, diremos que el **tensor de curvatura de Ricci** es la traza del *tensor de curvatura de Riemann*:

$$Ric^\nabla = C_2^1(Riem^\nabla) \in \mathfrak{T}^{(0,2)}(M)$$

tal que

$$\begin{aligned} Ric^\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ Ric^\nabla(X, Y) &= Tr(W \mapsto Riem^\nabla(X, W)Y) \end{aligned}$$

En esta misma línea, si seguimos trabajando con el fibrado TM , tenemos que la derivada covariante $\nabla_Y X$ entre campos vectoriales es también un campo vectorial. En este caso, tiene sentido pensar qué relación puede existir entre $\nabla_Y X$ y $\nabla_X Y$. Si pensamos en \mathbb{R}^n con la conexión natural, tenemos que $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ y entonces:

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_Y X &= Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ \nabla_X Y &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned} \right\} \implies \nabla_X Y - \nabla_Y X = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = [X, Y]$$

Por lo tanto, tenemos que en \mathbb{R}^n con la conexión natural, la diferencia entre las derivadas covariantes es igual al *corchete de Lie*, que ya estudiamos al definir la derivada de Lie. Es entonces natural preguntarnos qué ocurre en general al comparar ambos términos, lo que nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.3.24. Dada una variedad diferenciable M , consideramos su fibrado tangente TM y las secciones del mismo, $\mathfrak{X}(M)$. Supongamos que tenemos definida sobre la variedad la conexión ∇ . Entonces, la expresión

$$T^\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

es $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineal, por lo que equivale a un $(1, 2)$ - campo tensorial. Este campo tensorial se denomina **tensor de torsión** de la conexión.

Este tensor tiene una interpretación geométrica directa. Recordemos que, cuando vimos la derivada de Lie, el corchete $[X, Y]$ nos permitía medir la diferencia de caminos entre los flujos de ambos campos vectoriales. Por ejemplo, si fijamos el punto $p \in M$ y consideramos los vectores X_p, Y_p para intentar construir un paralelogramo a partir de ellos considerando el flujo de ambos, entonces el corchete de Lie, $[X, Y]$, mide la “imposibilidad” de formar el paralelogramo. Ahora, en lugar de considerar los flujos, intentemos formar el paralelogramo a través del transporte paralelo. En este caso, la torsión es la responsable de medir la “obstrucción” existente para formar el paralelogramo, es decir, mide la obstrucción de la existencia de coordenadas paralelas. Además, la diferencia entre la dirección obtenida siguiendo el flujo y siguiendo el transporte paralelo es precisamente la derivada covariante. Para intentar aclarar la situación que estamos analizando, podemos ver una representación de la misma en la siguiente imagen:

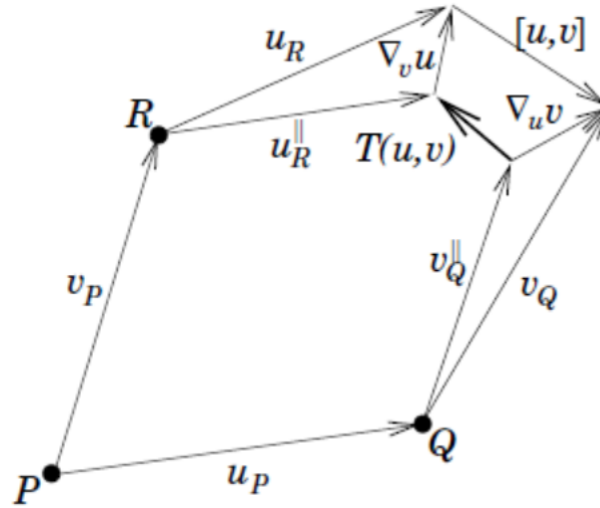


Figura 8: Paralelogramos obtenidos a partir del flujo y el transporte paralelo

Por lo tanto, si se cumple que $T^\nabla \equiv 0$, tendremos que existen unas coordenadas que no sufren desviación $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$, por lo que el transporte paralelo no se desvía y podemos decir que da lugar a una dirección paralela en el sentido clásico. En tal caso, diremos que la conexión es **simétrica**.

Por último, tras haber analizado la curvatura y la torsión y haber visto sus efectos en el transporte paralelo, hemos estudiado cómo los campos vectoriales, en general, se transportan paralelamente a una dirección dada sufriendo una desviación. Ahora queremos caracterizar aquellos campos vectoriales (o secciones en general) no sufren desviación al desplazarse a lo largo de una curva. Para ello, imaginemos dada una variedad diferenciable M sobre la que consideramos el fibrado tangente $\pi : TM \rightarrow M$ y dotada de una conexión ∇ . Sea γ una curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ que nos permite definir el *fibrado pullback* a través de γ como

$$\gamma^*(TM) = \{(t, x) \in I \times TM \mid \gamma(t) = \pi(x) = p \in M\}$$

Es posible extender la conexión ∇ sobre dicho fibrado, de forma que obtendríamos:

$$\nabla : \mathfrak{X}(I) \times \Gamma(\gamma^*(TM)) \rightarrow \Gamma(\gamma^*(TM))$$

donde las secciones están definidas como $\Gamma(\gamma^*(TM)) = \{X : I \rightarrow TM \mid X(t) \in T_{\gamma(t)}M\}$. De esta forma, solo tenemos una dirección sobre la que podemos derivar, la dirección tangente a la curva, $\dot{\gamma}(t)$, siendo capaces entonces de medir la desviación sufrida por el transporte paralelo asociado a γ . Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.3.25. Dada una conexión ∇ sobre el fibrado tangente $\pi : \gamma^*(TM) \rightarrow M$ asociado a la curva $\gamma : I \rightarrow M$, diremos que una sección $w \in \Gamma(\gamma^*(TM))$ es **paralela a lo largo de la curva** γ si $\nabla_{\dot{\gamma}}w = 0$, $t \in I$.

Las curvas que son paralelas a ellas mismas son de gran importancia en la física y son las conocidas como *geodésicas*:

Definición 2.3.26. Diremos que una curva $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\dot{\gamma} \in \Gamma(\gamma^*(TM))$ es una **curva geodésica** si $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$.

Si trabajamos con un sistema de coordenadas sobre el fibrado tangente, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_i$, sobre el que podemos expresar el espacio tangente a la curva como $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, la condición para que la curva sea geodésica, que se conoce por la *ecuación geodésica* viene dada por:

$$\frac{d^2\dot{\gamma}^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\dot{\gamma}^i}{dt} \frac{d\dot{\gamma}^j}{dt} = 0$$

Por tanto, la noción de *curva geodésica* es un concepto geométrico que nos permite generalizar el concepto de “línea recta” que conocemos de la geometría euclidiana a construcciones geométricas más generales. Se trataría de la curva que se adapta a la curvatura del espacio donde vive para moverse por él sin sufrir desviación. Desde un punto físico, podrían pensarse como las curvas de aceleración nula puesto que el vector tangente, que sería la velocidad, no varía a lo largo de la curva. Para verlo más claro, imaginemos el caso en el que sobre una hoja plana, que puede representar el espacio \mathbb{R}^2 , trazamos una línea recta entre dos puntos. Claramente, la línea recta es la curva que une estos dos puntos sin sufrir “desviación”, puesto que la geometría de \mathbb{R}^2 es plana. Sin embargo, pensemos que doblamos y enrollamos esta hoja de forma que obtenemos un cilindro, tal y como podemos ver en la siguiente figura:

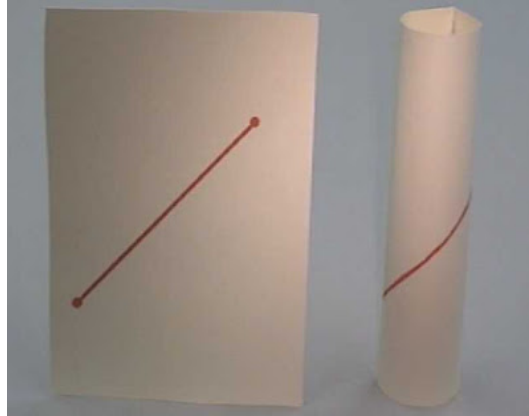


Figura 9: Cilindro obtenido al enrollar una hoja [Fuente: [28]]

En este caso, ahora la línea recta que une los dos puntos diríamos que está curvada debido a la geometría del cilindro. Aun así, esta sería “la curva más derecha posible” que podemos trazar dentro del cilindro para unir estos puntos. El concepto que nos permite realizar esta generalización es la *geodésica*.

Al estudiar cómo varía la línea recta al pasar de vivir dentro del plano \mathbb{R}^2 al cilindro, hemos podido vislumbrar que podemos distinguir entre dos tipos de curvatura: la *curvatura intrínseca* y la *curvatura extrínseca*. Consideremos primero la superficie de un cilindro, la cual como vimos previamente se obtiene enrollando una hoja plana de papel. Uno puede pensar que la superficie de un cilindro es curva puesto que dicha superficie está “redondeada” en cierta dirección en torno al eje de simetría. Sin embargo, esta se trata de una *curvatura extrínseca*, ya que no tiene relación alguna con el espacio tri-dimensional plano (en la hoja del cilindro) del cual forma parte. Uno puede formar la superficie de un cilindro con el simple hecho de enrollar un pedazo plano de papel sin necesidad de tener que cortar o arrugar el papel en lo más mínimo, de modo tal que la geometría intrínseca es la misma es la misma que la del pedazo de papel original, que es una geometría plana. Así, las *líneas paralelas* trazadas sobre la hoja plana de papel original siguen siendo paralelas después de haber sido enrollado el papel para formar un cilindro. Si pensamos en una persona confinada a vivir sobre la superficie de un cilindro, la superficie del cilindro sería una superficie plana en todos sentidos y no tendría forma alguna de detectar la curvatura haciendo mediciones sobre dicha superficie.

Por lo tanto, la geometría intrínseca de una hoja n -dimensional considera únicamente la relación que pueda haber entre los puntos de las trayectorias confinados a su superficie, mientras que la geometría extrínseca proviene del considerar a dicha superficie como parte de un espacio formado por un mayor número de dimensiones como lo es el caso de la superficie del cilindro. De este modo, la geometría extrínseca descansa sobre la suposición de la existencia de espacios multidimensionales con un mayor número de dimensiones. En la Relatividad General, como veremos más adelante, cuando hablamos de la curvatura del espacio-tiempo nos referimos a una curvatura intrínseca, puesto que todas las líneas del mundo están confinadas a permanecer en un espacio cuatri-dimensional; en la Relatividad General en su formulación original no hay

espacios de cinco dimensiones o más.

Integración sobre variedades

Dada una variedad diferenciable, M , de dimensión n , puede resultarnos de gran interés *medir* el volumen total de dicha variedad. Para ello, es importante que, tal y como hemos mencionado ya en secciones anteriores, tengamos bien definida una *referencia* de cómo medir dicho volumen. Al estudiar las formas diferenciales, vimos la existencia de *formas de volumen*, que proporcionan una medida para calcular el volumen de una variedad. Por esto, dada una forma de volumen $\omega \in \Omega^n(M)$, nuestro objetivo es encontrar el *volumen total de M respecto ω* , que denotaremos como $\omega(M)$, o bien, $\int_M \omega$.

Sin embargo, como veremos más tarde, no nos sirve cualquier tipo de variedad diferenciable. Para poder tener bien definida la integral $\int_M \omega$ y, así, poder obtener el volumen de M respecto la forma ω , necesitaremos que nuestra variedad M sea *orientable*.

Definición 2.3.27. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Diremos que dicha variedad es una **variedad orientable** si existe una n -forma diferencial sobre M que no se anule para todo $p \in M$. De esta forma, tendremos que el conjunto

$$\text{Vol}(M) = \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \omega_p \neq 0, \forall p \in M\}$$

de las formas diferenciales de orden n sobre M que no se anulan en ningún punto es un conjunto no vacío.

De esta forma, tenemos una definición que nos permite conocer cuándo una variedad diferenciable es *orientable*. Sin embargo, aunque de forma intuitiva sabemos qué es la *orientación* que puede tener una variedad, no tenemos ninguna definición rigurosa sobre dicho concepto. Veamos cómo podemos definirlo:

Definición 2.3.28. Sea M una variedad diferenciable orientable, es decir, $\text{Vol}(M) \neq \emptyset$. Sobre el conjunto $\text{Vol}(M)$ podemos definir una *relación de equivalencia*:

$$\omega \equiv \bar{\omega} \iff \omega = f \cdot \bar{\omega} \text{ para } f \in \mathcal{C}^\infty(M) \text{ tal que } f(p) > 0, \forall p \in M$$

La *clase de equivalencia* de $\omega \in \text{Vol}(M)$ la denotaremos como $[\omega]$. De esta forma, cada una de las *clases de equivalencia* se denomina **orientación** de M . Además, dada una *orientación*, $[\omega]$, es posible considerar la orientación opuesta, que viene dada por $[-\omega]$.

Una vez hemos definido a qué llamaremos *variedad orientable* y qué entendemos por *orientación* de una variedad, podemos definir el concepto de *variedad orientada*, tal y como haremos a continuación:

Definición 2.3.29. Diremos que una **variedad orientada** es un par $(M, [\omega])$ formado por una variedad diferenciable orientable M y una orientación $[\omega]$ fijada sobre M .

Observación. Sea U un abierto no vacío de la variedad orientada $(M, [\omega])$. Entonces, es claro que U también es orientable y su orientación es la inducida de forma natural por $[\omega|_U]$.

Veamos algunos ejemplos sencillos de orientaciones sobre variedades diferenciables:

- Ejemplos 2.3.30.**
1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es una variedad orientable, cuya orientación estándar viene dada por la n -forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ dada por el producto exterior de las 1-formas diferenciales dadas por la base canónica.
 2. Una curva diferenciable no singular es una variedad orientable de dimensión 1. Para fijar una orientación sobre ella basta con elegir un sentido de recorrido de la curva, es decir, un sentido de su vector tangente.
 3. Dada una superficie orientable de dimensión 2, definir una orientación sobre ella consiste en dar un sentido de giro alrededor de cada punto de dicha variedad. Esto es posible hacerlo definiendo una *aplicación normal*, que asocie en cada punto un vector normal a dicha superficie.

Para intentar definir ahora la integral sobre una variedad, consideremos M una variedad diferenciable orientada de dimensión n a la que podemos asociar el atlas (U_i, ϕ_i) . Dada una n -forma diferencial, ω , cuyo soporte (la clausura sobre M de todos los puntos donde no se anula la forma) $\text{Sop}(\omega) = \text{Adh}(\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\})$ es un conjunto *compacto*, queremos definir su integral

$$\omega(M) \text{ o bien } \int_M \omega$$

Antes de empezar a definir dicha integral, recordemos dos propiedades importantes de la integral que nos serán muy útil posteriormente:

1. Consideremos una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un abierto U de \mathbb{R}^n . Sabemos que f será integrable si f es continua y su soporte, $\text{Sop}(f) = \text{Adh}(\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}) \subset V$, es compacto. En tal caso, sobre dicho abierto U podemos considerar su *medida de Lebesgue* asociada, denotando su integral como

$$\int_U f dx_1 \cdots dx_n$$

Lo que es importante recordar es que dado V un abierto de U que contiene al soporte de f , $\text{Sop}(f)$, entonces tenemos que

$$\int_V f dx_1 \cdots dx_n = \int_U f dx_1 \cdots dx_n$$

2. Si consideramos que $(U; u_1, \dots, u_n)$ es un abierto coordenado de una variedad diferenciable, podemos denotar como \tilde{U} al abierto de \mathbb{R}^n tal que $U \xrightarrow{\phi=(u_1, \dots, u_n)} \tilde{U}$ es un difeomorfismo. De esta forma, es posible definir una medida sobre U , que llamaremos μ , inducida por ϕ dada la *medida de Lebesgue* en el abierto \tilde{U} . De esta forma, denotaremos

$$\int_U f d\mu = \int_{\tilde{U}} f du_1 \cdots du_n$$

Gracias a lo que hemos visto en la propiedad anterior, tenemos que si $V \subset U$ es un abierto de U que contiene el soporte de f , la integral se puede expresar

$$\int_U f du_1 \cdots du_n = \int_V f du_1 \cdots du_n$$

Lo importante aquí es concretar el valor de la integral $\int_U f du_1 \cdots du_n$. Sabemos que dada una aplicación entre variedades, su *pullback* nos permite definir el isomorfismo $\phi^* : \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ de forma que existe una *única* función diferenciable $F = F(x_1, \dots, x_n)$ tal que $f = \phi^* F = F \circ \phi$. De esta forma, si F es integrable en el sentido usual, tenemos que

$$\int_U f(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_n = \int_{\tilde{U}} F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, nos disponemos ahora a definir la integral $\int_M \omega$. En el caso general, el soporte de la forma de volumen, ω , no tiene por qué estar contenido en algún abierto coordenado U_i . Sin embargo, podemos ver que el caso general puede reducirse a este último. Veámoslo: consideremos la familia de abiertos coordenados $\{U_i\}_{i \in I}$ que recubren la variedad M y consideremos una *partición de la unidad*, $\{f_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}^\infty(M)$, subordinada a dicho recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$. Entonces, para todo $p \in M$ existe un entorno abierto, V_p , que corta a un número finito de cerrados de la familia $\{\text{Sop}(f_i)\}_{i \in I}$, puesto que dicha familia es localmente finita. De esta forma, como $\text{Sop}(\omega) \subset M$ es compacto y tiene un recubrimiento que puede venir dado por $\{V_p\}_{p \in \text{Sop}(\omega)}$, tenemos que existe también un número finito de puntos $x_1, \dots, x_r \in \text{Sop}(\omega)$ tales que $\text{Sop}(\omega) \subset V_{p_1} \cap \cdots \cap V_{p_r}$. Así, queda demostrado que $\text{Sop}(\omega)$ corta únicamente a un número finito de cerrados de $\{\text{Sop}(f_i)\}_{i \in I}$. Por lo tanto, existirá un subconjunto finito J de los índices I tal que si $i \in I$ pero $i \notin J$, tenemos $f_i \cdot \omega = 0$. Sea $J = \{1, \dots, m\}$, entonces se verifica que:

$$\omega = 1 \cdot \omega = \left(\sum_{i \in I} f_i \right) \cdot \omega = \sum_{i \in I} f_i \cdot \omega = \sum_{i \in J} f_i \cdot \omega$$

De esta forma, para todas las n -formas $f_1 \cdot \omega, \dots, f_m \cdot \omega$ se verifica que su soporte está contenido en algún abierto coordenado. Para terminar de hilar este razonamiento, tenemos que demostrar que dicha definición no depende del recubrimiento ni de la partición de la unidad que sea escogida. Para ello, consideremos otro recubrimiento por abiertos coordenados de M , $\{V_i\}_{i \in \tilde{I}}$, y una partición de la unidad, $\{g_i\}_{i \in \tilde{I}}$, subordinada a dicho recubrimiento. Análogamente, tendremos que existe un número finito de índices, $\tilde{J} = \{1, \dots, s\}$, tal que

$$\omega = g_1 \cdot \omega + \cdots + g_s \cdot \omega$$

cumpliéndose que cada forma $g_i \cdot \omega$ tiene soporte en un abierto coordenado del recubrimiento $\{V_i\}_{i \in \tilde{I}}$.

Fijando el índice $i \in \{1, \dots, r\}$, todas las n -formas $f_i g_1 \cdot \omega, \dots, f_i g_s \cdot \omega$ verifican que su soporte está incluido en el mismo abierto coordenado, $\{U_i\}_{i \in I}$, aquel que contiene a $\text{Sop}(f_i)$. Así pues, tenemos que $\text{Sop}(f_i g_j \cdot \omega) \subset \text{Sop}(f_i)$ para $j = 1, \dots, s$. Por lo tanto, la n -forma suma de estas

formas también tendrá soporte compacto contenido en el mismo abierto coordenado, por lo que podemos escribir

$$\int_M \left(\sum_{j=1}^s f_i g_j \cdot \omega \right) = \sum_{j=1}^s \int_M (f_i g_j \cdot \omega)$$

De la misma forma, si fijamos el índice $j \in \{1, \dots, s\}$, obtenemos el resultado análogo $\int_M (\sum_{i=1}^r f_i g_j \cdot \omega) = \sum_{i=1}^r \int_M (f_i g_j \cdot \omega)$.

Por lo tanto, gracias a los dos últimos resultados, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \int_M (f_i \cdot \omega) &= \sum_{i=1}^r \int_M (f_i (\sum_{j=1}^s g_j \cdot \omega)) = \sum_{i=1}^r \int_M (f_i g_j \cdot \omega) = \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \int_M f_i g_j \cdot \omega = \sum_{j=1}^s \int_M g_j (\sum_{i=1}^r f_i \cdot \omega) = \sum_{j=1}^s \int_M g_j \cdot \omega \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado que la integral no depende ni del recubrimiento ni de la partición de la unidad.

Hasta ahora hemos visto que cualquier caso puede reducirse a aquel en el que el soporte de la forma, ω , esté contenido en algún abierto coordenado $(U_i; u_{i_1}, \dots, u_{i_n})$ de M . Veamos ahora cómo definiremos la integral en este último caso. Para ello, lo primero es tomar “*de forma correcta*” las coordenadas del abierto coordenado U_i para que las coordenadas u_{i_1}, \dots, u_{i_n} definan el sentido correcto de la orientación inducida en U_i por M . Como las componentes conexas de U_i son abiertas y el $\text{Sop}(\omega)$ es compacto, dicho cerrado solo corta a un número finito de componentes conexas. Por lo tanto, escogiendo un abierto más pequeño si fuera necesario, podemos suponer que el abierto U_i tiene un número finito de componentes conexas. En todos estas componentes la orientación inducida está definida por $du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_n}$ o bien $-du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_n} = d(-u_{i_1}) \wedge \dots \wedge du_{i_n}$, por lo que cambiando las coordenadas u_{i_1}, \dots, u_{i_n} por $-u_{i_1}, \dots, u_{i_n}$ si fuese necesario podemos suponer que el abierto U_i es tal que $du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_n}$ define la orientación en U_i inducida por la de M .

Una vez escogida de forma adecuada las coordenadas sobre el abierto U_i , podemos expresar nuestra n -forma de interés en la base $\{du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_n}\}$ de $\Omega^n(U_i)$, de forma que

$$\omega = f du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_n}$$

donde claramente $\text{Sop}(\omega) = \text{Sop}(f)$. En este caso, definimos la integral de ω sobre M como

$$\int_M \omega := \int_{U_i} f(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) du_{i_1} \dots du_{i_n}$$

Puede verse que claramente esta definición no depende del abierto coordenado que contenga al soporte de ω , simplemente se ha de considerar otro abierto coordenado $(V; v_1, \dots, v_n)$ y considerar la intersección $U \cap V \supset \text{Sop}(\omega)$, donde podemos suponer que $U_i = V$. Entonces, aplicando

el *Teorema del cambio de variables integral* para el cambio de coordenadas $u_i = h_i(v_1, \dots, v_n)$ tenemos que $\int_M \omega = \int_V f(h_1(v_1, \dots, v_n), \dots, h_n(v_1, \dots, v_n)) \cdot J \cdot dv_1 \cdots dv_n$ donde J es el jacobiano del cambio de variables. Así, vemos como no depende del abierto coordenado como consecuencia directa de aplicar el *Teorema del cambio de variables integral*.

Así, hemos definido la integral de una n -forma sobre una variedad en el caso general. Ahora, a modo de generalizar el *Teorema fundamental del cálculo*, tras haber definido la integral en variedades enunciaremos (sin demostración) su generalización: el *Teorema de Stokes*.

Teorema 2.1. (*Teorema de Stokes*) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , con borde ∂M y orientada, en la que tenemos definida una orientación. Consideremos una $(n-1)$ -forma diferencial con soporte compacto $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Entonces:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega$$

donde $i : \partial M \rightarrow M$ es la inclusión de ∂M en M y ∂M viene dotado de la orientación inducida de la orientación de M .

2.4 Geometría (semi-)Riemanniana

Hasta ahora hemos estudiado diferentes estructuras que podemos obtener a partir de las variedades diferenciables y herramientas que nos permiten trabajar con estas. Sin embargo, hemos definido pocas propiedades geométricas y aun no sabemos cómo medir distancias, volúmenes ni ángulos en nuestra nueva construcción geométrica. Para ello, nos será necesario introducir el concepto de *métrica* sobre una variedad diferenciable, de la misma forma que se introdujo el producto escalar y la métrica en los espacios euclídeos, con el fin de poder estudiar propiedades métricas en los espacios vectoriales.

Definición 2.4.1. Dada una variedad diferenciable M , diremos que un $(0,2)$ -campo tensorial simétrico y suave, $g \in \mathfrak{T}^{0,2}$, tal que $g_p \forall p \in M$ es definido positivo define una ***métrica Riemanniana*** sobre la variedad M . Al par (M, g) lo nombraremos ***variedad Riemanniana***.

La idea de métrica es la misma que la ya conocida para los espacios vectoriales. A modo de aclaración, veamos algunos ejemplos de métricas sobre variedades diferenciables:

- Ejemplos 2.4.2.**
1. El ejemplo más básico y sencillo de *métrica Riemanniana* es la *métrica Euclídea*, g , sobre el espacio vectorial \mathbb{R}^n , considerado como una variedad diferenciable. Dicha métrica puede expresarse en coordenadas cartesianas como $g = \delta_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$, que aplicada a dos vectores da el producto escalar ordinario entre ambos.
 2. Dentro del espacio vectorial \mathbb{R}^2 considerado como una variedad diferenciable podemos considerar la métrica Riemanniana canónica, que viene dada en coordenadas cartesianas por $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$. Dicha métrica puede expresarse en coordenadas polares

si es necesario, dado por el cambio de variable $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $x = \phi(r \cos \theta)$ y $y = \phi(r \sin \theta)$. Entonces, expresando los diferenciales dx , dy en coordenadas polares tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{array} \right\} \Rightarrow dx \otimes dx + dy \otimes dy = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$$

Por lo tanto, tenemos que el pullback $\phi^*g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$ nos da la métrica expresada en coordenadas polares.

Gracias a esta construcción, tenemos todas las herramientas para poder definir la *norma* de los vectores tangente, el *ángulo* entre dos vectores tangentes no nulos, la *longitud* de un trozo de curva, etc. de la misma forma que lo hicimos en los espacios euclídeos.

En nuestra definición de métrica hemos impuesto que el campo tensorial sea definido positivo en todos los puntos. Sin embargo, en Relatividad General esta condición a veces puede ser demasiado restrictiva. Por este motivo, se da una definición alternativa de métrica en la que no es necesario que el campo tensorial sea definido positivo, sino simplemente no degenerado. Este tipo de métrica se conoce como *métrica semi-riemanniana*. Veamos a continuación su definición formal:

Definición 2.4.3. Una ***métrica semi-riemanniana*** sobre una variedad diferenciable M es un $(0, 2)$ -campo tensorial simétrico y suave, η , que es **no-degenerado** para todo punto $p \in M$. Al par (M, η) se le denomina ***variedad semi-riemanniana***.

En Relatividad General será muy común usar un ejemplo concreto de *métrica semi-riemanniana*, que nos permitirá definir una dirección privilegiada en el espacio-tiempo: el *eje temporal*. Esta métrica se denomina *métrica lorentziana* y puede definirse de la siguiente manera:

Definición 2.4.4. Diremos que una *métrica semi-riemanniana* es una ***métrica lorentziana*** sii su signatura es $(1, n - 1)$, o bien, $(n - 1, 1)$.

Dada la definición de *métrica lorentziana*, es muy sencillo definir lo que será el objeto básico de la Relatividad General: la *variedad lorentziana*.

Definición 2.4.5. Diremos que el par (M, η) es una ***variedad lorentziana*** si M es una variedad diferenciable sobre la que podemos definir la *métrica lorentziana* η en todos sus puntos.

Así, ahora podemos tener dos construcciones geométricas sobre la misma variedad diferenciable. No obstante, es importante hacer la siguiente observación: dada una variedad diferenciable, siempre es posible encontrar al menos una métrica riemanniana que sea compatible con dicha variedad, es decir, que esté bien definida para todos sus puntos. Sin embargo, esto no es así, como veremos, para una métrica semi-riemanniana. La causa de este hecho es el nuevo aspecto fundamental de esta construcción geométrica: la métrica no es *positiva definida*. Esto lleva a que puedan existir vectores en el espacio tangente para los que la métrica *degenera*, es decir, $\eta(v, \cdot) = 0$, $v \in T_x M$, $x \in M$. De hecho, una condición necesaria y suficiente para que una variedad diferenciable M admita una métrica semi-riemanniana es que exista un campo vectorial

$V \in \mathfrak{X}(M)$ sobre dicha variedad que no se anule en ningún punto de la variedad. Además, gracias a esta nueva característica de la métrica semi-riemanniana podemos clasificar los vectores del espacio tangente en función de su valor al aplicarle la métrica:

Definición 2.4.6. Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$ un punto cualquiera de dicha variedad. Consideremos el vector $x \in T_p M$ del espacio tangente a M en p . Entonces, diremos que dicho vector es:

- De tipo espacio, comúnmente ***spacelike***, si $g(x, x) > 0$,
- De tipo luz, comúnmente ***null***, si $g(x, x) = 0$,
- De tipo tiempo, comúnmente ***timelike***, si $g(x, x) < 0$.

Si el vector $x \in T_p M$ es *timelike* o *null*, entonces diremos que es ***causal***.

Observación. Esta definición puede ser generalizada para cualquier *curva regular suave* en una variedad diferenciable M extendiendo las definiciones anteriores para el vector tangente de dicha curva.

Además, con estas definiciones, para cada punto $p \in M$ podemos definir los siguientes conjuntos:

Definición 2.4.7. Dada una variedad diferenciable M y un punto cualquiera de ella $p \in M$, tenemos que

- $\mathcal{S}_p = \{x \in T_p M \mid g(x, x) > 0\}$ es el conjunto de *vectores spacelike* en el espacio tangente a p ,
- $\mathcal{I}_p = \{x \in T_p M \mid g(x, x) < 0\}$ es el conjunto de *vectores timelike* en el espacio tangente a p ,
- $\mathcal{N}_p = \{x \in T_p M \mid g(x, x) = 0\}$ es el conjunto de *vectores null* en el espacio tangente a p .

Por lo tanto, al contrario que para una métrica riemanniana, existirá un conjunto de vectores, \mathcal{N}_p , sobre los que la métrica se anula siempre y, por lo tanto, obtenemos que $g|_{\mathcal{N}_p}$ es una métrica degenerada. De esta forma, nos resultará imposible estudiar propiedades métricas, realizar proyecciones, etc.

Antes de seguir estudiando propiedades de esta nueva construcción geométrica, veamos un ejemplo muy importante de métrica lorentziana: la ***métrica de Minkowski***. Esta métrica permite definir la geometría del espacio-tiempo de un universo trivial, totalmente simétrico, vacío y estático:

Ejemplo 2.4.8. La ***métrica de Minkowski***, g , en el espacio lineal de \mathbb{R}^4 es una forma bilineal simétrica y no degenerada de signatura $(-, +, +, +)$. Por lo tanto, existirá una base vectorial $\{e_0, e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^4$ tal que

$$g(e_\alpha, e_\beta) = g_{\alpha\beta} \text{ donde } \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$$

en este caso $g_{\alpha\beta}$ podemos obtener una representación matricial que viene dada por

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, si consideramos el sistema ortogonal de coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) , la métrica g se puede escribir como un $(0, 2)$ -tensor: $g = -dt \otimes dt + dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3 = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$. Sobre este sistema de coordenadas, podemos estudiar cómo caracterizar a los vectores del espacio tangente. Diremos que un vector $X \in \mathbb{R}^4$, que viene dado por $X = (t, x^1, x^2, x^3)$ en dicho sistema de coordenadas (considerando $c = 1$), sobre un punto $p \in \mathbb{R}^4$ es:

- de tipo tiempo o *timelike* si $t^2 < (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$,
- de tipo espacio o *spacelike* si $t^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$,
- nulo o *null* si $t^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$.

Análogamente, podemos clasificar los vectores del espacio tangente al punto $p \in \mathbb{R}^4$ en los siguientes conjuntos:

- $\mathcal{I}_p = \{X = (t, x^1, x^2, x^3) \in T_p M \mid t^2 < (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\}$
- $\mathcal{S}_p = \{X = (t, x^1, x^2, x^3) \in T_p M \mid t^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\}$
- $\mathcal{N}_p = \{x = (t, x^1, x^2, x^3) \in T_p M \mid t^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\}$

De esta forma, es claro que podemos identificar al conjunto de vectores nulos, \mathcal{N}_p , como el doble cono cuyo vértice es el punto $p \in \mathbb{R}^4$, que se suele denominar *double null cone*: $\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_p^+ \cup \mathcal{N}_p^-$. Además, el conjunto de vectores de tipo tiempo, \mathcal{I}_p , estaría formado por el interior de dicho cono mientras que el conjunto de vectores de tipo espacio, \mathcal{S}_p , sería todo el exterior de dicho cono. El conjunto de vectores de tipo tiempo también puede separarse en dos componentes, $\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_p^+ \cup \mathcal{I}_p^-$, de forma que $\mathcal{N}_p^+ = \partial \mathcal{I}_p^+$ y $\mathcal{N}_p^- = \partial \mathcal{I}_p^-$.

Una vez analizadas las condiciones y propiedades de existencia de una métrica semi-riemanniana y visto un ejemplo de ellas, nos gustaría estudiar cómo una variedad diferenciable “hereda” una métrica semi-riemanniana. En el caso riemanniano, tenemos que si $j : N \rightarrow M$ es una *inmersión* de la subvariedad N en la variedad riemanniana M con métrica g , entonces $j^*(g)$ es claramente una métrica riemanniana en N . Recordemos que un *embedding o inmersión* es una aplicación *suave* tal que j_* es una aplicación inyectiva y la aplicación $j : N \rightarrow M$ es un homeomorfismo entre N considerado como una variedad diferenciable y N considerado como un subconjunto inmerso en la variedad (M, g) . En el caso semi-riemanniano, tal y como veremos a continuación, no es así de sencillo y en general al restringir una métrica semi-riemanniana el resultado no es siempre una métrica del mismo tipo. Para verlo, vamos a considerar una variedad semi-riemanniana, formada por el par (M, g) y una variedad diferenciable, \tilde{M} , tal que podemos

considerar la *inmersión* o *embedding* $j : \tilde{M} \rightarrow M$. De la propia definición, tenemos que la imagen $j(\tilde{M}) \subset M$ es una subvariedad diferenciable y, por lo tanto, heredará propiedades de M . Nuestro objetivo es entonces estudiar cómo podemos restringir la métrica, g , de la variedad semi-riemanniana (M, g) sobre la subvariedad \tilde{M} . El problema que encontramos en este caso es el hecho de que la métrica semi-riemanniana, g , al no ser necesariamente definida positiva provoca que al restringir la métrica sobre $(\tilde{M}, \tilde{g} = j^*g)$, esta pueda resultar riemanniana, semi-riemanniana o degenerada. Esta característica nos permite definir los siguientes tipos de subvariedades semi-riemannianas:

Definición 2.4.9. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana y \tilde{M} una variedad diferenciable, sobre las que es posible definir la inmersión $j : \tilde{M} \rightarrow M$, $j(\tilde{M}) \subset M$. Entonces, diremos que la subvariedad semi-riemanniana $(\tilde{M}, \tilde{g} = j^*g)$ es:

1. de tipo espacio o ***space-like*** si la métrica \tilde{g} es una métrica riemanniana,
2. de tipo tiempo o ***time-like*** si la métrica \tilde{g} es una métrica semi-riemanniana,
3. de tipo luz o nula, ***light-like o null*** si la métrica \tilde{g} es degenerada en todo punto.

Veamos un ejemplo para ilustrar estas últimas definiciones:

Ejemplo 2.4.10. Consideremos la variedad semi-riemanniana (de hecho, lorentziana) (\mathbb{R}^4, g) donde g es la métrica de *Minkowski*. Si consideramos la base vectorial canónica sobre \mathbb{R}^4 , $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, podemos expresar la métrica en forma de matriz:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, podemos identificar diferentes subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4 sobre los que restringir la métrica:

1. Sea $H_1 = [e_2, e_3]$ un espacio vectorial de \mathbb{R}^4 . Si restringimos la métrica g sobre este subespacio $g|_{H_1} = g_1$ obtenemos:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, obtenemos que la restricción g_1 es una métrica riemanniana y la subvariedad (H_1, g_1) es de tipo espacio o *space-like*.

2. Sea $H_2 = [e_1, e_2]$ un espacio vectorial de \mathbb{R}^4 . Análogamente, si restringimos la métrica g sobre este nuevo subespacio $g|_{H_2} = g_2$ obtenemos:

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, al contrario que en el caso anterior, obtenemos que la restricción g_2 es una métrica semi-riemanniana y, por lo tanto, la subvariedad (H_2, g_2) es de tipo tiempo o *time-like*.

3. Sea $H_3 = [e_1 + e_2, e_3]$ otro espacio vectorial de \mathbb{R}^4 . En este caso, si restringimos la métrica g sobre este nuevo subespacio $g|_{H_3} = g_3$ tenemos que:

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que obtenemos una degeneración de la métrica puesto que la matriz de g_3 no tiene rango máximo. Por lo tanto, diremos que la subvariedad (H_3, g_3) es nula o *null*. Este tipo de subvariedades son de gran interés en la Relatividad General y serán objeto de estudio en el capítulo 4.

En lo que queda de capítulo, consideraremos que la métrica inducida es *no degenerada*. En este caso, es posible definir un nuevo tipo de fibrado vectorial: el *fibrado normal*, definido gracias a la noción de ortogonalidad dada por la métrica de la misma forma que estamos acostumbrados en los espacios euclídeos:

Definición 2.4.11. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana y sea (\tilde{M}, \tilde{g}) una subvariedad no degenerada de dicha variedad, tal que es posible definir la inmersión $j : \tilde{M} \rightarrow M$. Diremos que el **espacio normal** en cada punto $p \in \tilde{M}$ es el espacio vectorial

$$T_{j(p)}^\perp j(\tilde{M}) = \{v \in T_{j(p)}M \mid g_{j(p)}(v, x) = 0, \forall x \in j_*T_p\tilde{M}\}$$

Considerando la unión disjunta de los espacios normales a todos los puntos $p \in \tilde{M}$, podemos definir el **fibrado normal** como

$$T^\perp j(\tilde{M}) = \bigsqcup_{p \in \tilde{M}} T_{j(p)}^\perp j(\tilde{M}) \subset j^*(TM)$$

Denotaremos como $\mathfrak{X}_j^\perp(M) = \Gamma(T^\perp j(\tilde{M})) \subset \Gamma(j^*(TM))$ el conjunto de campos vectoriales sobre $j(\tilde{M})$ que son normal a la variedad. De la misma forma, denotaremos como $\mathfrak{X}_j^\top(M) \subset \Gamma(j^*(TM))$ a los campos vectoriales tangentes a la variedad.

Como hemos mencionado anteriormente, esta definición estará bien definida solo en el caso en que la métrica sea no degenerada. En tal caso, esta definición nos permite descomponer el fibrado tangente de M como suma directa de espacios ortogonales

$$TM = j_*(T\tilde{M}) \oplus T_{j(p)}^\perp j(\tilde{M})$$

Además, gracias a esta nueva definición ahora somos capaces de asignar un campo vectorial normal, $\nu \in \mathfrak{X}_j^\perp(M)$, a una hipersuperficie $H \subset M$. Recordemos que, dada una variedad (M, g) , una hipersuperficie $H \subset M$ es una subvariedad de codimensión 1. Por lo tanto, al menos

localmente, en un subconjunto $U \subset H$, existirá un único (*llevado de signo*) vector unitario, $\nu \in \mathfrak{X}_j^\perp(j(U))$, del fibrado normal tal que dicho vector es perpendicular a $j(U) \subset M$. Por ser un vector unitario, tenemos que para todo campo $X \in \mathfrak{X}(H)$, la derivada covariante cumple $\nabla_X \nu \perp \nu$. Esto quiere decir que la variación del campo normal a lo largo de H es tangente a $j(H)$, es decir, $\nabla_X \nu \in \mathfrak{X}_j^\top(M)$. Si consideramos el vector normal en cada punto, podemos definir la siguiente aplicación:

Definición 2.4.12. Sea $H \subset M$ una hipersuperficie de la variedad semi-riemanniana (M, g) tal que (H, \bar{g}) es una subvariedad cuya métrica heredada es no degenerada. Sea $\nu \in \mathfrak{X}^\perp(H)$ un campo vectorial normal a la hipersuperficie. La aplicación lineal $\mathcal{W} : \mathfrak{X}(H) \rightarrow \mathfrak{X}(H)$ definida por

$$j_*(\mathcal{W}(X)) = -\nabla_X \nu$$

se denomina **aplicación de Weingarten**. Además, es posible definir su equivalente métrico, $K \in \mathfrak{T}^{0,2}(\bar{M})$ definida por

$$K(X, Y) = \bar{g}(\mathcal{W}(X), Y)$$

Este campo tensorial es conocido como la **segunda forma fundamental** de ν .

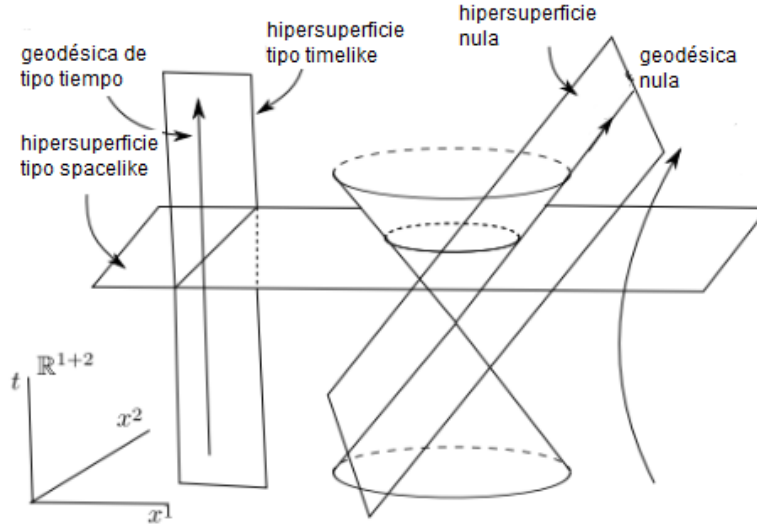
Por lo tanto, esta aplicación nos permite estudiar el ratio de cambio en el espacio ambiente de un campo vectorial normal unitario ν a lo largo de la dirección tangente determinada por el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Además, nos permite caracterizar de forma única a las hipersuperficies de la variedad diferencial a través de la asignación del campo normal $\nu \in \mathfrak{X}^\perp(H)$. Esta caracterización nos permite obtener una definir de forma alternativa la clasificación causal de las hipersuperficies:

- Definición 2.4.13.**
1. Diremos que una hipersuperficie H es **spacelike** si el vector normal ν_x en cada punto $x \in H$ es timelike. En este caso, la métrica $g|_{T_x H}$ es definida positiva.
 2. Diremos que una hipersuperficie H es **null o lightlike** si el vector normal ν_x en cada punto $x \in H$ es nulo. En este caso, la métrica $g|_{T_x H}$ es degenerada.
 3. Diremos que una hipersuperficie H es **timelike** si el vector normal ν_x en cada punto $x \in H$ es spacelike. En este caso, la métrica $g|_{T_x H}$ has signature $(-, +, +)$ y, por lo tanto, es lorentziana.

Si consideramos el ejemplo anterior, el espacio-tiempo de Minkowski (\mathbb{R}^{3+1}, η) las hipersuperficies nulas, spacelike y timelike pueden ser representadas como:

Isomorfismos musicales

Hasta ahora hemos definido y estudiado la herramienta que nos permitirá definir más adelante el concepto de *espacio-tiempo*: la variedad semi-riemanniana (lorentziana). Hemos visto ejemplos y hemos clasificado las subvariedades utilizando criterios métricos. Sin embargo, no hemos analizado si la métrica nos permite relacionar de alguna forma las secciones de los fibrados de la variedad semi-riemanniana. Claramente la respuesta es que sí y es posible gracias a los conocidos como *isomorfismos musicales*.



Definición 2.4.14. Dada una variedad semi-riemanniana no degenerada, (M, g) , consideremos el campo de vectores sobre M , $\mathfrak{X}(M)$, y las 1-formas diferenciales sobre M , $\Omega^1(M)$. Se denominan **isomorfismos musicales** a los isomorfismos establecidos entre $\mathfrak{X}(M)$ y $\Omega^1(M)$ definidos a partir de la métrica de la siguiente forma:

$$\flat_g : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$$

$$(\flat_g V)(W) = g(V, W)$$

o bien usando la notación indexada de Penrose:

$$V_a := (\flat_g V)_a = g_{ab} V^b$$

Análogamente tenemos:

$$\sharp_g : \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\alpha(W) = g(\sharp_g \alpha, W), \text{ para algún } \alpha \in \Omega^1(M)$$

o con la notación indexada:

$$\alpha^a := (\sharp_g \alpha)^a = g^{ab} \alpha_b$$

donde g^{ab} no es más que la métrica inversa.

Viendo las definiciones es claro denominarlos isomorfismos *musicales*, puesto que suben y bajan los índices de los vectores. Por ejemplo, dado un sistema de coordenadas, un vector del espacio tangente TM puede escribirse como $v_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mientras que un covector del mismo se escribiría como $v_i dx^i$, por lo que el índice i sube y baja en v del mismo modo que los símbolos sostenido (\sharp) y bemol (\flat) suben y bajan un semitono.

Campos vectoriales de Killing

Una vez estudiadas las propiedades de la métrica en las variedades semi-riemannianas, nos gustaría saber cómo esta puede afectar a las funciones entre variedades que vimos en la sección anterior sobre sendas métricas. Las funciones que nos interesarán son aquellas que mantienen las propiedades de la métrica: las *isometrías*.

Definición 2.4.15. Sean (M_1, g_1) y (M_2, g_2) dos variedades semi-riemannianas. Diremos que una aplicación $F : M_1 \rightarrow M_2$ es una **isometría** si es un difeomorfismo entre variedades tal que $F^*(g_2) = g_1$.

Esta definición puede extenderse de manera natural sobre una sola variedad semi-riemanniana y tendremos que una *isometría* sobre una variedad semi-riemanniana no es más que un difeomorfismo sobre la misma variedad que deja la métrica invariante. Esto nos permite definir un tipo especial de *isometrías* que son de gran importancia en la teoría de la Relatividad General porque permiten definir tanto leyes de conservación como construir otros invariantes útiles en la resolución de problemas físicos: los *campos de Killing*.

Definición 2.4.16. Dada una variedad semi-riemanniana (M, g) , diremos que un campo vectorial X sobre M es un **campo de Killing** si los difeomorfismos F^t que define su flujo son isometrías de M .

Aunque la definición axiomática es sencilla, existe una manera mucho más fácil y práctica de determinar si un campo sobre una variedad es de *Killing* gracias a las herramientas estudiadas anteriormente:

Proposición 2.4.17. X es un **campo de Killing** sii $\mathcal{L}_X g = 0$.

Por lo tanto, este campo determina la dirección a lo largo de la cual la métrica no cambia. En general, este campo no existe para una métrica cualquiera, por lo que nos permite definir una clasificación:

Definición 2.4.18. Dado una variedad (semi-)riemanniana, (M, g) , diremos que se trata de una variedad **estacionaria** si admite un *campo de Killing*. Si, además, dicho campo es irrotacional y timelike, entonces diremos que es una variedad *estática*.

La conexión de Levi-Civita

En la sección anterior, estudiamos la definición de conexión y su relación con el transporte paralelo para acabar estudiando las curvas geodésicas de dicha conexión. Sin embargo, ahora lo que queremos ver es cómo, a partir de una variedad (semi-)riemanniana, (M, g) , podemos construir una única conexión que sea coherente con la métrica. En las variedades (semi-)riemannianas nos encontramos con dos estructuras: la *métrica* y el *transporte paralelo*. Lo ideal sería que ambas fueran compatibles, es decir, que el transporte paralelo dejara invariante la geometría (longitudes, ángulos, ...). Además, tenemos que las *geodésicas métricas*, que dan la distancia más corta entre dos puntos, vienen dadas por los extremos del funcional de distancia

$$S(\alpha) = \int_I ds \sqrt{|g_{\alpha(s)}(\dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s))|}, \quad \alpha : I \rightarrow M$$

Análogamente, querríamos que las curvas que minimizan la distancia (geodésicas respecto de g) coincidan con las curvas de aceleración nula (geodésicas respecto del transporte paralelo).

En primer lugar, definiremos la noción de una conexión compatible con la métrica:

Definición 2.4.19. Sea (M, g) una métrica (semi-)riemanniana. Dada una conexión ∇ sobre M , diremos que la **conexión ∇ es compatible con la métrica g** si para cualquier curva dentro de la variedad $\gamma : I \rightarrow M$ y cualesquiera campos paralelos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ a lo largo de la curva γ se verifica que la función $g(X, Y)$ es constante.

Una formulación equivalente es la siguiente: diremos que la conexión ∇ es compatible con la métrica si, para campos cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

De esta forma, el transporte paralelo a lo largo de una curva con respecto a una conexión que sea compatible con la métrica sería una *isometría lineal* y la conexión y la métrica serían coherentes entre ellas.

Tal y como era de esperar, el *teorema fundamental de la geometría riemanniana* nos garantiza la existencia dicha conexión: la **conexión de Levi-Civita**.

Teorema 2.2. Dada una variedad (semi-)riemanniana cualquiera, siempre es posible encontrar una **única conexión afín, simétrica y compatible con la métrica**, que llamaremos **conexión de Levi-Civita**. Además, dicha conexión está completamente determinada por la siguiente expresión, conocida como fórmula de Koszul:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = \nabla_X g(Y, Z) + \nabla_Y g(Z, X) + \nabla_Z g(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [Z, X]) - g(Z, [X, Y])$$

Observación. Recordemos que una conexión ∇ es simétrica si presenta torsión $T^\nabla \equiv 0$.

En términos locales, si trabajamos con un sistema de coordenadas, x_i , es posible demostrar que los *símbolos de la conexión de Levi-Civita* vienen completamente determinados por los coeficientes de la métrica a través de la siguiente expresión:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

A partir de ahora, siempre consideraremos la variedad (semi-)riemanniana (M, g) equipada con la conexión de Levi-Civita, por lo que no será necesario hablar de geodésicas respecto la métrica o respecto la conexión. Simplemente hablaremos de *geodésicas*, pues ahora las geodésicas serán curvas α cuya aceleración respecto de la conexión de Levi-Civita es cero, dejando invariante las propiedades geométricas.

Antes de estudiar otras propiedades geométricas gracias a la definición de la conexión de Levi-Civita, es importante estudiar la herencia de la conexión de una variedad y la de sus subvariedades. Dada una variedad (semi-)riemanniana, (M, g) , sea N la subvariedad tal que $\bar{g} = g|_N$ no es degenerada. Entonces, podemos considerar también su conexión de Livi-Civita asociada,

$\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$, que nos permite conocer su *curvatura intrínseca*. Además, considerando el embedding $j : N \rightarrow M$, tenemos sobre $j(N)$ la conexión inducida $\nabla_X(Y \circ j) = \nabla_{j^*X}Y$. Aunque no lo demostraremos, puede verse que, efectivamente, ambas conexiones coinciden y la conexión se “hereda” correctamente. De hecho, si nos centramos en el caso de hipersuperficies, podemos considerar la *fórmula de Gauss*:

Lemma 2.3. (Fórmula de Gauss) Sea (M, g) una variedad diferenciable dotada de la conexión ∇ sobre la que consideramos la hipersuperficie $H \subset M$. Dados dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(H)$, tenemos la descomposición:

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + K(X, Y)$$

donde $\bar{\nabla}$ representa la conexión sobre la hipersuperficie H , es decir, es la parte de la conexión de M tangente a ella, mientras que el término K de la segunda forma fundamental representa el término de la conexión normal a la hipersuperficie.

De la fórmula de Gauss puede deducirse que las geodésicas de la subvariedad serán geodésicas de la variedad completa si $K = 0$.

Curvatura en geometría semi-riemanniana

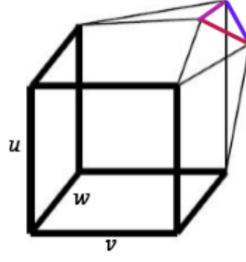
Acabamos de ver cómo hemos relacionado la conexión estudiada en la sección anterior para variedades cualesquiera con la estructura fundamental de las variedades (semi-)riemannianas: la métrica. Ahora podemos considerar la conexión de Levi-Civita y retomar otra construcción estudiada en la sección anterior: la curvatura asociada a la conexión de Levi-Civita. Veamos cómo quedaría la *identidad de Bianchi* considerando el tensor de curvatura actuando sobre campos vectoriales tangentes:

$$0 = d_{\nabla} \text{Riem}(v, w, u) = \nabla_v \text{Riem}(w, u) + \nabla_w \text{Riem}(u, v) + \nabla_u \text{Riem}(v, w)$$

Además, como estamos trabajando con la conexión de Levi-Civita, la torsión es cero y obtenemos la siguiente expresión:

$$\text{Riem}(w, u)v + \text{Riem}(u, v)w + \text{Riem}(v, w)u = 0$$

Siguiendo la misma idea que usamos al estudiar la torsión, al formar el paralelogramo formado por dos vectores, podemos obtener una interpretación geométrica de esta última expresión si consideramos el paralelepípedo formado por tres vectores. Tal y como podemos ver en la siguiente figura, representa la obstrucción existente para obtener el paralelepípedo debido a la desviación sufrida por la conexión: Además, podemos mencionar otro resultado geométrico de la curvatura que nos será muy útil para estudiar la interacción entre partículas que se mueven bajo un campo gravitatorio en la teoría de la Relatividad General: es la noción de *desviación geodésica*. A través de la ecuación de desviación geodésica es posible relacionar el tensor de curvatura de Riemann con la aceleración relativa entre dos geodésicas inicialmente paralelas y cercanas, permitiendo conocer como estas se desvían al moverse a lo largo de dichas curvas.



$$R(w, u)v + R(u, v)w + R(v, w)u = 0$$

Figura 10: Interpretación geométrica de la identidad de Bianchi [Fuente: [28]]

Además, nos gustaría encontrar un invariante geométrico de la curvatura que poder asociar a una variedad (semi-)riemanniana (M, g) . Esto es posible gracias a la contracción del tensor de Ricci a través de la métrica, mediante los isomorfismos musicales:

$$R = \text{Tr}_g \text{Ric} = g^{ij} \text{Ric}_{ij} = \text{Ric}^i_i$$

Así, a cada punto de una variedad (semi-)riemanniana, el escalar de curvatura R le asocia un número real que viene determinado por la curvatura intrínseca de la variedad en un entorno cercano al punto.

Por último, imaginemos que trabajamos localmente con un sistema de coordenadas, x^i . Entonces, de la misma forma que vimos que se podía determinar los símbolos de Christoffel a través de las componentes de la métrica, es posible relacionar el tensor de curvatura de Riemann y el tensor de Ricci con los símbolos (y, por lo tanto, con la métrica):

$$\text{Riem}^\nabla = \text{Riem}^a_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a_{bd}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a_{bc}}{\partial x^d} + \Gamma^a_{ec} \Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{ed} \Gamma^e_{bc}$$

$$\text{Ric}^\nabla = \text{Ric}_{ab} = \text{Riem}^c_{acb} = \frac{\partial \Gamma^c_{bd}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^c_{bc}}{\partial x^d} + \Gamma^c_{ec} \Gamma^e_{bd} - \Gamma^c_{ed} \Gamma^e_{bc}$$

Estas fórmulas serán las que nos permitan hallar las coordenadas del tensor de Riemman y de Ricci en un sistema de coordenadas local.

3. Repaso de Física: fundamentos de Relatividad Especial y Relatividad General

Una vez estudiadas las principales herramientas matemáticas necesarias para formular la *teoría de la Relatividad General*, en este capítulo veremos los postulados que nos permiten construir dicha teoría. Para poder desarrollar esta sección nos hemos basado en las fuentes [2], [26] y [29], que pueden ser consultadas en caso de querer profundizar en las ideas que brevemente expondremos en esta sección.

3.1 Fundamentos de Relatividad Especial: el espacio-tiempo de Minkowski

A finales del siglo XIX existían dos grandes teorías que conformaban la mayor parte de la Física: la *mecánica clásica* y el *electromagnetismo*, basadas en las ecuaciones de **Newton** y **Maxwell**, respectivamente. Ambas teorías conseguían explicar de forma rigurosa e independiente tanto los fenómenos mecánicos como los fenómenos eléctricos y magnéticos. Sin embargo, los postulados de ambas teorías (*los cuales junto a la estructura causal asumiremos como conocidos a lo largo del capítulo*) eran incompatibles entre ellos. Por lo tanto, era necesario reestructurar las leyes de la física con el fin de construir una nueva teoría que permita explicar de forma coherente ambos fenómenos: la *teoría de la Relatividad Especial*.

Por ello, en 1905 Albert Einstein publica un artículo titulado *On the electrodynamics of moving bodies*, en el que describe las relaciones algebraicas que gobiernan el movimiento de observadores uniformes, de forma que las *ecuaciones de Maxwell* tienen la misma forma independientemente del sistema de referencia. Para ello, Einstein modifica los postulados de la mecánica clásica y establece los postulados de su nueva teoría:

1. **Primer Postulado: Principio de Relatividad Especial.** Existe un tipo de sistemas de referencia, denominados *sistemas de referencia inerciales*, en los que son válidas las leyes de la Física. Los sistemas inerciales se desplazan entre ellos a velocidad constante o están en reposo relativo.
2. **Segundo Postulado: Principio de invariancia de la velocidad de la luz.** La velocidad de la luz es una constante universal, por lo tanto, es la misma para todos los sistemas de referencia y es independiente del movimiento de la fuente y el observador.

Estos nuevos postulados aportan ideas revolucionarias a la Física y rompen con la teoría establecida previamente. La consecuencia más importante que podemos extraer de dichos postulados es que el tiempo y el espacio dejan de tener un carácter absoluto, pues ahora están ligados por la velocidad de la luz. De esta forma, el Universo es considerado como un continuo compuesto

por eventos, donde cada evento puede ser pensado como un punto en el espacio en un cierto instante de tiempo. A este continuo es al que referiremos como **espacio-tiempo**. Con esta idea, los postulados anteriores pueden ser completados con el siguiente:

Postulado cero: Estructura del espacio-tiempo. El tiempo y espacio no son independientes. El espacio-tiempo es un espacio afín de dimensión 4 dotado de una métrica semi-riemanniana de signatura $(1, 3)$.

En la siguiente imagen podemos ver cómo cambia la percepción newtoniana del espacio-tiempo al introducir la nueva teoría de la Relatividad Especial:

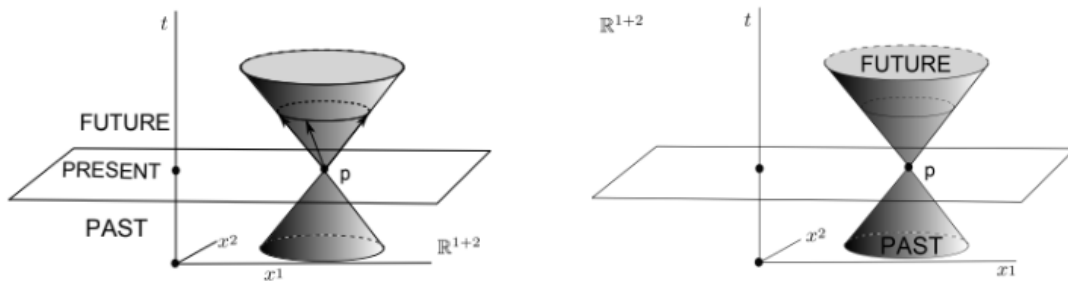


Figura 11: A la izquierda, la concepción newtoniana del espacio-tiempo. A la derecha, la nueva percepción de la Relatividad Especial [Fuente: [29]]

En 1908, Hermann Minkowski mostró que las leyes algebraicas de Einstein y la nueva estructura del espacio-tiempo podían ser interpretadas de una forma puramente geométrica simplemente introduciendo un nuevo tipo de métrica sobre el espacio \mathbb{R}^{3+1} , la conocida como *métrica de Minkowski*, que ya estudiamos en el capítulo anterior. De esta forma, el *espacio-tiempo de Minkowski* es la pareja (\mathbb{M}^4, η) donde \mathbb{M}^4 es un espacio afín que se identifica con \mathbb{R}^4 y η es la métrica de Minkowski.

A partir de ahora se asumirán como conocidos los principios de la Relatividad Especial por parte del lector. Sin embargo, pensamos que no viene mal recordar ciertos conceptos que usaremos también en Relatividad General:

- Definición 3.1.1.**
1. Los puntos del espacio \mathbb{M}^4 los llamaremos **sucesos espacio-temporales** o **eventos**.
 2. Los vectores del espacio tangente $T_p\mathbb{M}^4$, $\forall p \in \mathbb{M}^4$ los llamaremos **cuadrivectores**.
 3. Las curvas dentro de \mathbb{M}^4 las llamaremos **líneas de universo**.
 4. Un sistema de referencia inercial será un sistema de referencia ortonormal afín del espacio \mathbb{M}^4 .
 5. Un observador en el espacio-tiempo es una curva de tipo tiempo en \mathbb{M}^4 orientada temporalmente hacia el futuro. Además, diremos que es un *observador inercial* si este sigue una trayectoria geodésica de tipo tiempo en \mathbb{M}^4 orientada hacia el futuro.

3.2 Fundamentos de Relatividad General. El principio de equivalencia

La teoría de la Relatividad General es la teoría del espacio, el tiempo y la gravitación que concluye el trabajo que Einstein empezó con la teoría de la Relatividad Especial. Gracias a ella, la teoría de Newton de la gravitación es generalizada, haciéndola compatible con la Relatividad Especial. Gracias a esta teoría, se resuelve el asunto pendiente de la Relatividad Especial: los observadores sujetos a cambios de velocidad. Para resolver y estudiar esta cuestión, Einstein formuló un principio sobre el cual descansa toda la *Teoría de la Relatividad General: el principio de equivalencia*, que dice lo siguiente:

Principio 3.2.1. (*Principio de equivalencia*). *Es imposible discriminar, al menos localmente, entre un sistema acelerado y un sistema inmerso en un campo gravitatorio. No hay diferencia físicamente observable entre los efectos locales de la gravedad y la aceleración.*

Este principio nos dice que una persona que sufre un movimiento acelerado es incapaz de discernir si dicha aceleración se debe a la gravedad o a alguna otra fuerza que la acelere. Detrás de este principio, por tanto, subyace algo muy importante: la equivalencia entre la *masa inercial* y la *masa gravitacional* de un cuerpo. La **masa inercial** es esencialmente la resistencia que presenta un cuerpo a ser acelerado, mientras que la **masa gravitacional** es la medida de la fuerza de atracción gravitatoria que experimenta una porción de materia básica dentro de un campo gravitatorio. Este principio implica que la *masa gravitacional* es igual a la *masa inercial* y nos permite partir de la base que ya tenemos, la Teoría de la Relatividad Especial, donde hemos supuesto que el espacio-tiempo es plano, considerando fenómenos de aceleración dentro de dicha teoría gracias a la incorporación de la curvatura del espacio-tiempo.

Einstein demostró que la mejor forma de estudiar la gravedad sería considerarla como un aspecto de la estructura del espacio-tiempo: como la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Por lo tanto, el espacio-tiempo de Minkowski no sería una buena opción para estudiar la gravedad puesto que no presenta curvatura. Así, Einstein llegó a que la presencia de gravedad es geoméricamente equivalente a la presencia de una métrica, g , con una curvatura no constante. De esta forma, la presencia de masa provocará la aparición de deformación en el espacio-tiempo. Todas estas ideas y fundamentos de la Relatividad General fueron recogidas en los siguientes postulados:

Postulados de Relatividad General

Postulado 0: Estructura del espacio-tiempo. El espacio-tiempo es una variedad diferenciable 4-dimensional con una métrica lorentziana (\mathbb{M}^4, g) .

Las definiciones de *cuadrivectores*, *eventos*, *líneas de universo*, etc. dadas en la sección anterior son totalmente válidas para este nuevo modelo de espacio-tiempo. Ahora podemos re-definir los conceptos de *observador inercial* y *sistema de referencia inercial*:

Definición 3.2.2. Un *observador inercial* local es una curva geodésica de tipo tiempo orientada hacia el futuro para la métrica del espacio-tiempo \mathbb{M}^4 . Un *sistema de referencia inercial* local es una carta local para la variedad (\mathbb{M}^4, g) donde la coordenada temporal representa el *tiempo propio* y el espacio tangente a \mathbb{M}^4 en cada punto admite una base ortonormal.

Observación. Recordemos que el *tiempo propio* entre dos eventos se define como el tiempo medido en un sistema de referencia S cuando ambos eventos ocurren en el mismo punto espacial y son medidos por el mismo reloj en S .

Postulado 1: Principio de Relatividad General. Los sistemas de referencia localmente inerciales son físicamente equivalentes. En ellos son válidas las leyes de la física establecidas en la Relatividad Especial.

Postulado 2: Principio general de covariancia. Las leyes de la Física han de ser independientes a la elección de un sistema particular de coordenadas. Así, las ecuaciones expresando leyes de la física deben ser escritas como *ecuaciones tensoriales*.

Postulado 3: Principio de correspondencia. La *Relatividad Especial* y la *Teoría de la Gravitación de Newton* son casos particulares de la Teoría de la Relatividad General.

3.3 Causalidad en el espacio-tiempo

Una vez presentados los postulados que nos permiten construir las bases de esta nueva teoría, queremos presentar cómo relacionar temporalmente *eventos* del espacio-tiempo. Para ello, a continuación definiremos la **estructura causal** del espacio-tiempo, que dependerá directamente de la curvatura asociada a la métrica. Para ello, lo primero que haremos será definir la noción de *orientabilidad en el tiempo*. Dado un evento en el espacio-tiempo, (\mathbb{M}^4, g) , que podemos considerar como un punto de la variedad $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^4$, trabajaremos con el conjunto de vectores de tipo tiempo del espacio tangente a la variedad en dicho punto, es decir, $\mathcal{I}_{\mathbf{p}} = \{X \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{M}^4 \mid g(X, X) < 0\}$. Nuestro objetivo será diferenciar este conjunto dos clases diferentes, que se corresponderán al concepto físico de *pasado* y *futuro*. Para ello, lo que primero que necesitamos es establecer una *relación de equivalencia* sobre dicho conjunto.

Definición 3.3.1. Dado un evento $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^4$ y dos vectores de tipo tiempo del espacio tangente a dicho punto, $X, Y \in \mathcal{I}_{\mathbf{p}}$, diremos que ambos vectores son equivalentes, $X \sim Y$, sii $g(X, Y) < 0$.

Gracias a esta relación de equivalencia, podemos dividir los vectores de tipo tiempo en dos clases complementarias. De forma arbitraria, podemos definir una de las clases como *orientada hacia el futuro* y otra como *orientada hacia el pasado*. Físicamente esta designación equivale a elegir una *flecha del tiempo* en un punto. Matemáticamente, podemos expresarlo de la siguiente forma:

Definición 3.3.2. Dada una variedad lorentziana (\mathbb{M}^4, g) , una **orientación temporal** de la variedad es una elección arbitraria entre las dos clases de equivalencia posibles en el conjunto de vectores de tipo tiempo del espacio tangente para todo punto $p \in \mathbb{M}^4$. Además, diremos que

una variedad lorentziana es **orientable en el tiempo** si se puede obtener una designación continua del futuro y el pasado para vectores no espaciales que sea válida para toda la variedad.

Observación. Por la definición anterior, tendremos que un espacio-tiempo (\mathbb{M}^4, g) será *orientable* si existe un campo vectorial no nulo de tipo tiempo, $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^4)$, que nos permite definir una orientación en el tiempo tomando como vectores dirigidos hacia el futuro aquellos que verifiquen $g(v, X_p) \leq 0, \forall v \in T_p\mathbb{M}^4$.

Aunque lo lógico sería pensar que todo espacio-tiempo debería ser orientable, pues a lo que estamos acostumbrados en nuestra *realidad*. Sin embargo, esto no es siempre así, pues existen variedades en las que no es posible definir de forma continua una dirección del futuro (o del pasado). Un ejemplo de una subvariedad en el espacio de Minkowski en la que no es posible establecer una orientación en el tiempo es el cilindro, como podemos ver en la siguiente imagen: Una vez definido formalmente el concepto de *orientabilidad temporal*, queremos ver cómo

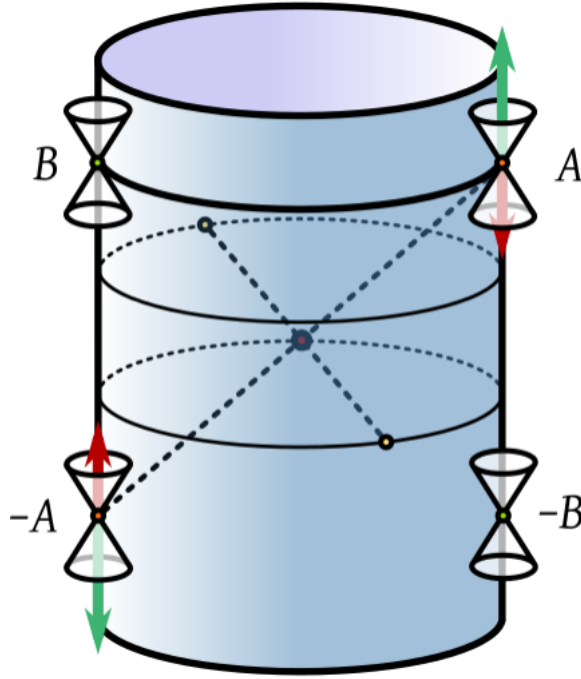


Figura 12: Espacio-tiempo cilíndrico no orientable en el tiempo [Fuente: [16]]

podemos relacionar eventos en una misma variedad. Para ello, a partir de ahora supondremos que la variedad con la que trabajamos es orientable en el tiempo. En tal caso:

Definición 3.3.3. Dada una variedad lorentziana (\mathbb{M}^4, g) , consideremos $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^4, \mathbf{q} \in \mathbb{M}^4$ dos eventos de dicho espacio-tiempo. Entonces:

1. Diremos que el suceso \mathbf{p} antecede cronológicamente al suceso \mathbf{q} , $\mathbf{p} \ll \mathbf{q}$, si existe una curva de tipo tiempo (*cronológica*) orientada hacia el futuro que va desde \mathbf{p} a \mathbf{q} .
2. Diremos que el suceso \mathbf{p} antecede causalmente de forma estricta al suceso \mathbf{q} , $\mathbf{p} < \mathbf{q}$, si existe una curva causal (de tipo tiempo o nula) orientada hacia el futuro que va desde \mathbf{p} a \mathbf{q} .

3. Diremos que el suceso \mathbf{p} antecede causalmente al suceso \mathbf{q} , $\mathbf{p} \prec \mathbf{q}$, si $\mathbf{p} < \mathbf{q}$ o bien $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

Gracias a estas definiciones ya somos capaces de relacionar diferentes eventos dentro de nuestro espacio-tiempo. Esto nos permitirá establecer la *estructura causal* de un evento a través de la definición de los siguientes conjuntos:

Definición 3.3.4. Dado el evento $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^4$ del espacio-tiempo, definimos su *estructura causal* como los siguientes conjuntos:

1. Diremos que el **futuro cronológico** del suceso \mathbf{p} , $\mathcal{I}^+(\mathbf{p})$, es el conjunto de eventos $\mathbf{q} \in \mathbb{M}^4$ tal que \mathbf{p} antecede cronológicamente a \mathbf{q} , es decir, que pueden ser alcanzados por una curva de tipo tiempo orientada hacia el futuro que empieza en \mathbf{p} , $\mathcal{I}^+(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{M}^4 \mid \mathbf{p} \ll \mathbf{q}\}$. Análogamente, definiremos el **pasado cronológico** del suceso \mathbf{p} como $\mathcal{I}^-(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{M}^4 \mid \mathbf{q} \ll \mathbf{p}\}$.
2. De forma similar, diremos que el **futuro causal** del suceso \mathbf{p} , $\mathcal{J}^+(\mathbf{p})$, es el conjunto de eventos $\mathbf{q} \in \mathbb{M}^4$ tal que \mathbf{p} antecede causalmente a \mathbf{q} , es decir, que pueden ser alcanzados por una curva causal orientada hacia el futuro que empieza en \mathbf{p} , $\mathcal{J}^+(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{M}^4 \mid \mathbf{p} \prec \mathbf{q}\}$. Análogamente, definiremos el **pasado causal** del suceso \mathbf{p} como $\mathcal{J}^-(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{M}^4 \mid \mathbf{q} \prec \mathbf{p}\}$.

Observación. Estas definiciones pueden ser generalizadas con el fin de definir la *estructura causal* de un conjunto $S \subset \mathbb{M}^4$, así, tendremos que:

$$\mathcal{I}^\pm(S) = \bigcup_{\mathbf{p} \in S} \mathcal{I}^\pm(\mathbf{p})$$

$$\mathcal{J}^\pm(S) = \bigcup_{\mathbf{p} \in S} \mathcal{J}^\pm(\mathbf{p})$$

A modo de ejemplo, podemos pensar en el *espacio-tiempo de Minkowski*. En este caso, la estructura causal de un evento \mathbf{p} tiene una sencilla visión geométrica. Consideremos como espacio-tiempo la variedad $\mathbb{M}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ y fijemos un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2+1}$, que podemos considerar como un evento del espacio-tiempo. En tal caso, podemos considerar el doble cono nulo que ya estudiamos en secciones anteriores. Ya vimos que, entonces, los vectores de tipo tiempo eran aquellos que estaban contenidos dentro del cono de luz mientras que los de tipo espacio eran aquellos que se encontraban fuera de él. Teniendo en mente esta estructura, podemos escoger arbitrariamente la parte positiva del cono como los vectores de tipo tiempo que apuntan hacia el futuro mientras que la parte negativa representaría aquellos que apuntan hacia el pasado. Así pues, tendremos que el futuro cronológico del evento \mathbf{p} , $\mathcal{I}^+(\mathbf{p})$, vendría dado por el interior de la sección positiva del cono de luz. Por otro lado, su futuro causal, $\mathcal{J}^+(\mathbf{p})$, sería la unión del interior del cono de luz junto al mismo cono. En la siguiente imagen podemos ver una representación de la estructura causal del espacio de Minkowski para un observador dado:

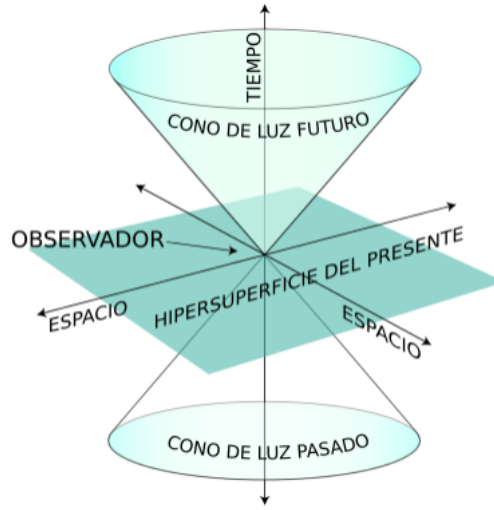


Figura 13: Estructura causal del espacio-tiempo \mathbb{R}^{2+1} de Minkowski [Fuent: [16]]

Hasta ahora hemos definido y estudiado la estructura causal del espacio-tiempo, definiendo formalmente lo que consideraremos como *futuro* y *pasado* y estableciendo relaciones entre ambos conjuntos. Ahora queremos mostrar características de la estructura del espacio-tiempo con respecto a (un conjunto de) eventos dados. De ahora en adelante, estudiaremos un tipo concreto de espacio-tiempo, que suelen denominarse como *espacio-tiempos fuertemente causales*.

Definición 3.3.5. Dado un espacio-tiempo (\mathbb{M}^4, g) , diremos que es **fuertemente causal** si alrededor de cada evento $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^4$ existen entornos tales que ninguna curva causal los cruza más de una vez.

Aunque pueda parecer una definición abstracta y difícil de entender, es fácil observar que este tipo de espacio-tiempos fuertemente causales no incluyen ciertos espacio-tiempos “patológicos”, en los que pueden existir *curvas temporales cerradas*.

Definición 3.3.6. En un espacio-tiempo \mathbb{M}^4 llamaremos **curva temporal cerrada** a la línea de universo de una partícula material que está cerrada en el espacio-tiempo, es decir, que es susceptible de regresar al mismo estado del que partió en el tiempo.

Un rasgo de estas curvas es que abren la posibilidad de que una línea de universo pueda no estar conectada a tiempos anteriores y también de la existencia de eventos que puedan no ser debidos a una causa anterior a ellos mismos. Sin embargo, la causalidad exige que cada evento en el espacio-tiempo sea producido por su causa, en todo marco de referencia en reposo. Por lo tanto, tiene sentido que a partir de ahora centremos nuestro interés en los espacio-tiempos que sean fuertemente causales. Más adelante veremos cómo este tipo de curvas nos permite definir regiones “*particulares*” del espacio-tiempo.

Por otro lado, una forma interesante de caracterizar ciertos subconjuntos del espacio-tiempo es a través de las condiciones de frontera del conjunto. Estos subconjuntos pueden ser considerados como *generadores* desde el punto de vista de relaciones causales entre los eventos. Por ejemplo,

a partir de uno de estos subconjuntos nos gustaría ser capaces de determinar la estructura del espacio-tiempo para un intervalo de tiempo arbitrario en el futuro. Por este motivo, necesitamos ir más allá a la hora de caracterizar las curvas causales. Para ello, contamos con la siguiente definición:

Definición 3.3.7. Diremos que una *curva causal*, γ , es una **curva inextendible orientada hacia el futuro** (resp. *hacia el pasado*) si es imposible encontrar un evento $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^4$ tal que exista un entorno $U \subset \mathbb{M}^4$ del punto donde podamos extender la curva γ , es decir, que exista un \tilde{t} tal que $\gamma(t) \in U$ para todo $t > \tilde{t}$ (resp. $t < \tilde{t}$).

Por lo tanto, lo que quiere decir esta definición es que este tipo de curvas no tienen punto final futuro (resp. pasado). Podemos formalizar la noción de *generador* que acabamos de comentar con la siguiente definición:

Definición 3.3.8. Sea (\mathbb{M}^4, g) un espacio-tiempo en el que consideramos la subvariedad $N \subset \mathbb{M}^4$. Entonces, diremos que una curva γ es un **generador** de la subvariedad N si es una curva inextendible tangente a la subvariedad.

Sigamos nuestro estudio de la estructura causal de una variedad intentando ahora caracterizar subvariedades donde los sucesos sean *simultáneos*. Desde un punto de vista causal, la simultaneidad debe ser entendida como la ausencia de cualquier tipo de relación de orden entre los sucesos. Para ello, precisamos de la definición del siguiente tipo de conjunto:

Definición 3.3.9. Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}^4$ una subvariedad del espacio-tiempo. Diremos que \mathcal{A} es **achronal** si no existe ninguna curva de tipo tiempo que interseque \mathcal{A} dos veces. De esta forma, para dos eventos cualesquiera $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{A}$ tenemos que $\mathbf{p} \notin \mathcal{I}^+(\mathbf{q})$ y $\mathbf{q} \notin \mathcal{I}^+(\mathbf{p})$.

Observación. Esta definición es equivalente a pedir que la subvariedad \mathcal{A} verifique que $\mathcal{A} \cap \mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \emptyset$.

El significado físico de esta definición es que no existe ningún tipo de relación causal entre los eventos dentro de este tipo de subvariedades. Si “relajamos” esta definición y permitimos que el subconjunto contenga algunos eventos que estén relacionados casualmente con algún otro, dicha subvariedad dejará de ser achronal. Podemos precisar más esta idea a través de la siguiente definición:

Definición 3.3.10. Dada una subvariedad achronal $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}^4$, diremos que un evento $\mathbf{p} \in \bar{\mathcal{A}}$ es un **punto de borde** si en un entorno abierto de dicho punto, U , existe una curva de tipo tiempo γ que conecta los conjuntos $\mathcal{I}^-(\mathbf{p}, U)$ con $\mathcal{I}^+(\mathbf{p}, U)$ de forma que no interseca con \mathcal{A} . Al conjunto de *puntos de borde* de \mathcal{A} se le denomina **el borde de \mathcal{A}** y se denota como $\mathcal{E}(\mathcal{A})$.

Observación. Es necesario destacar que los conjuntos $\mathcal{I}^\pm(\mathbf{p}, U)$ no son más que los conjuntos $\mathcal{I}^\pm(\mathbf{p})$ vistos como subvariedades dentro del abierto U .

Ahora podemos intentar unir las dos definiciones anteriores, definiendo una nueva subvariedad:

Definición 3.3.11. Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}^4$ una subvariedad achronal cerrada en el espacio-tiempo. El conjunto de eventos \mathbf{p} tal que toda curva causal inextendible orientada hacia el pasado (resp. futuro) pasando por el evento interseca con \mathcal{A} se denomina **dominio de dependencia del**

futuro (resp. **del pasado**) del conjunto \mathcal{A} y se denota como $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$). El conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \cup \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ unión de los dominios de dependencia futuro y pasados se denomina **dominio de dependencia de \mathcal{A}** .

Podemos intentar encontrar la interpretación física de esta última definición. Desde un punto de vista físico, podemos considerar los eventos en el conjunto $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$) pueden ser considerados como los *efectos* (resp. las *causas*) de los eventos de la subvariedad \mathcal{A} .

Un caso muy importante desde el punto físico es en el que el *dominio de dependencia* es todo el espacio-tiempo \mathbb{M}^4 . En tal caso, comenzando en los eventos “*simultáneos*” de la subvariedad \mathcal{A} , podemos predecir los eventos del futuro, puesto que todos están determinados causalmente por los del conjunto \mathcal{A} . Además, de la misma forma, tenemos conocimiento completo de los sucesos del pasado. Por lo tanto, este tipo de subvariedades serán de gran importancia en la teoría de la casualidad, lo que nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3.3.12. Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}^4$ una subvariedad achronal del espacio-tiempo tal que su *dominio de dependencia* está formado por todos los eventos del espacio-tiempo, es decir, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathbb{M}^4$. En tal caso, diremos que \mathcal{A} es una **hipersuperficie de Cauchy** del espacio-tiempo \mathbb{M}^4 . Además, un espacio-tiempo \mathbb{M}^4 que admite una *hipersuperficie de Cauchy* se le denomina **globalmente hiperbólico**.

Observación. Se puede probar que una *hipersuperficie de Cauchy* es un conjunto achronal tal que el borde es el vacío.

De esta forma, tenemos que en una *hipersuperficie de Cauchy* toda curva causal inextendible interseca solo una única vez. Además, la existencia de una hipersuperficie de Cauchy es una propiedad global del espacio-tiempo. La siguiente proposición nos dirá que si en nuestro espacio-tiempo existe una hipersuperficie de Cauchy, Σ , entonces es topológicamente “única”.

Proposición 3.3.13. Si un espacio-tiempo (\mathbb{M}^4, g) orientable en el tiempo admite dos hipersuperficies de Cauchy, entonces estas son homeomorfas.

Demostración. Consideremos que en el espacio-tiempo (\mathbb{M}^4, g) existen dos hipersuperficies de Cauchy Σ_1, Σ_2 . Como el espacio-tiempo es orientable en el tiempo, existirá un campo vectorial de tipo tiempo que no se anula en ningún punto. Entonces, las curvas integrales de dicho campo intersecan ambas hipersuperficies y son de tipo tiempo. La proyección de Σ_1 sobre Σ_2 a través de las curvas integrales nos permite definir una biyección continua cuya inversa es la proyección de Σ_2 sobre Σ_1 . \square

Una vez demostrado que la existencia de una hipersuperficie de Cauchy es una propiedad global para el espacio-tiempo, podemos ver (*sin demostración*) que la topología de un espacio-tiempo globalmente hiperbólico está completamente determinado por la hipersuperficie de Cauchy:

Proposición 3.3.14. Si $\Sigma \subset \mathbb{M}^4$ es una hipersuperficie de Cauchy, entonces el espacio-tiempo \mathbb{M}^4 es homeomorfo a $\Sigma \times \mathbb{R}$.

Esta proposición nos permite llegar a la conclusión de que existe una función global asociada al tiempo $t : \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que las curvas de nivel de la función $\Sigma_\tau = \{t = \tau\}$ son hipersuperficies de Cauchy de tipo espacio. Además, las hipersuperficies Σ_τ definen una foliación de \mathbb{M}^4 .

Observación. Conviene recordar que una **foliación** es una partición de una variedad diferenciable en subvariedades de dimensión constante y menor que la dimensión de la variedad original.

Lo último que veremos en esta sección es el concepto de *horizonte de Cauchy*, que retomaremos en próximas secciones. Hemos estudiado el caso en el que el dominio de dependencia de nuestra subvariedad era todo el espacio-tiempo, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathbb{M}^4$. Esto en general no tiene por qué ser así y nos conduce a la existencia de **horizontes de Cauchy**. Cuando tenemos que $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \neq \mathbb{M}^4$ existirá *horizonte de Cauchy* entre $\mathcal{D}^\pm(\mathcal{A})$ y regiones de la variedad que no esté completamente determinada por información sobre \mathcal{A} . Podemos definir entonces:

Definición 3.3.15. Dado una subvariedad achronal del espacio-tiempo, $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}^4$, definiremos el **horizonte de Cauchy orientado hacia el futuro de \mathcal{A}** , $\mathcal{H}^+(\mathcal{A})$ como el conjunto:

$$\mathcal{H}^+(\mathcal{A}) = \{\mathbf{p} \in \bar{\mathcal{D}}^+(\mathcal{A}) \mid \mathcal{I}^+(\mathbf{p}) \cap \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) = \emptyset\}$$

El **horizonte de Cauchy orientado hacia el pasado de \mathcal{A}** , $\mathcal{H}^-(\mathcal{A})$, se define análogamente. El **horizonte de Cauchy de \mathcal{A}** se define como la unión de ambos, $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}^+(\mathcal{A}) \cup \mathcal{H}^-(\mathcal{A})$.

Los *horizontes de Cauchy* son unas regiones que serán de gran importancia al estudiar los agujeros negros, por lo que retomaremos su estudio más adelante.

Para terminar esta sección sobre la causalidad del espacio-tiempo, retomemos el ejemplo del *espacio-tiempo de Minkowski*:

Ejemplo 3.3.16. (*Estructura causal del espacio-tiempo de Minkowski*). Lo primero que se nos viene a la cabeza al intentar estudiar la causalidad es pensar si es posible encontrar una foliación del espacio-tiempo por hipersuperficies espaciales, pues ya hemos visto que este hecho presenta buenas propiedades. Por eso, inicialmente podríamos considerar la foliación:

$$\phi : \mathcal{H}_\tau \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3+1}$$

donde las hipersuperficies espaciales son $\mathcal{H}_\tau = \{t = \tau\}$. Sin embargo, esta foliación no permite mostrar las propiedades de las geodésicas nulas, que sabemos que son de gran importancia. Por lo tanto, hemos de considerar otra foliación que nos permita incluir estas propiedades geométricas: la conocida como *double-null foliation*.

Consideremos el espacio de Minkowski con el sistema de coordenadas $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tal que la métrica viene dada por $\eta = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Una geodésica temporal viene entonces dada por una curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\alpha(t) = (t, 0, 0, 0)$. Sea $p = \alpha(0) \in \mathbb{R}^4$ un punto del espacio-tiempo sobre el que estudiamos el *null double-cone* del que es vértice. Entonces, podemos asignar el cono nulo orientado hacia el futuro a la subvariedad:

$$\mathcal{C}_p = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0\}$$

mientras que el orientado hacia el pasado sería:

$$\bar{\mathcal{C}}_p = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 0\}$$

Con el fin de simplificar las expresiones y considerar la simetría esférica del problema, podemos tomar las coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) . Así, la métrica de Minkowski vendría dada de la forma:

$$\eta = -dt^2 + dr^2 + r^2 \cdot g_S(\theta, \phi)$$

donde $g_S(\theta, \phi) = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es la métrica en la esfera unidad. Además, los dos fragmentos del *null double-cone* en cualquier punto $q = \alpha(\tau) \in \mathbb{R}^4$ vendrían dados por:

$$\mathcal{C}_\tau = \{(t, r, \theta, \phi) \mid t - r = \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$$

$$\bar{\mathcal{C}}_\tau = \{(t, r, \theta, \phi) \mid t + r = \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$$

Por lo tanto, es claro que podemos aplicar el cambio de coordenadas $u = t - r, v = t + r$, pudiendo considerar las conocidas como *coordenadas nulas* (u, v, θ, ϕ) tal que $v \geq u$ y $u = v \iff r = 0$. Teniendo en cuenta que $t = \frac{1}{2}(u + v) \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(du + dv)$ y $r = \frac{1}{2}(u - v) \Rightarrow dr = \frac{1}{2}(du - dv)$, podemos expresar la métrica de la siguiente manera:

$$\eta = -dudv + \frac{1}{4}(u - v)^2 \cdot g_S(\theta, \phi)$$

y la doble foliación nula quedaría:

$$\mathcal{C}_\tau = \{(t, r, \theta, \phi) \mid u = \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$$

$$\bar{\mathcal{C}}_\tau = \{(t, r, \theta, \phi) \mid v = \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$$

Podemos ver una representación de dicha foliación en la siguiente imagen:

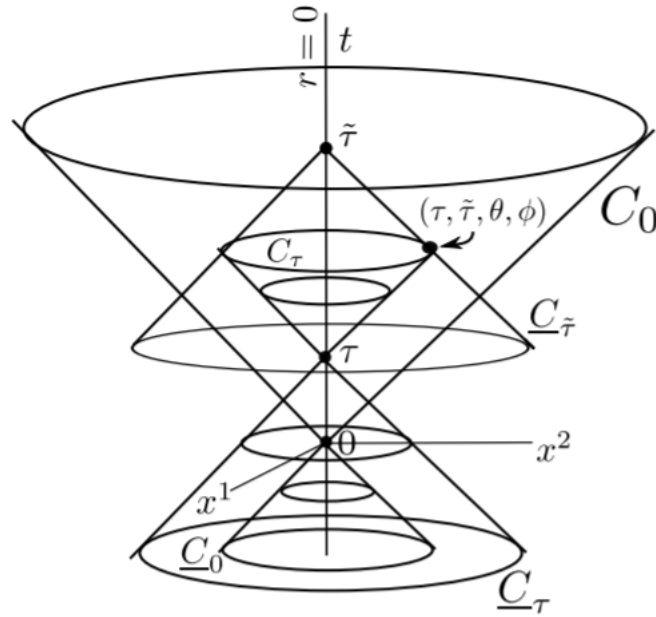


Figura 14: Doble foliación nula en el espacio de Minkowski de \mathbb{R}^3 [Fuente: [29]]

3.4 Ecuaciones de la Relatividad General

Hasta ahora únicamente hemos definido los principios y la estructura de nuestro objeto de estudio: el *espacio-tiempo*. Hemos visto que la Relatividad General pretende cambiar, a través de la geometría, el enfoque clásico de la gravitación para hacerlo compatible con la nueva teoría de la Relatividad Especial.

Hasta entonces, la interacción gravitatoria se había considerado desde el punto de vista newtoniano como una interacción entre masas y eramos capaces de medir dicha interacción gracias al concepto de *campo de fuerzas*. Como ya hemos visto, Einstein demostró que dicha interacción podía ser representada de mejor forma como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. La distribución de materia, que es totalmente equivalente a la distribución de energía desde un punto de vista relativista, por lo que hablaremos de *distribución de materia-energía*, determina la métrica y, por lo tanto, la curvatura y la geometría del espacio-tiempo. Es claro entonces que necesitamos unas nuevas ecuaciones que nos permitan definir esta relación entre la geometría y la distribución de materia-energía en nuestro espacio-tiempo (\mathbb{M}^4, g) . Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones de Einstein** y serán las ecuaciones del campo gravitatorio en Relatividad General. Siguiendo el *Principio de Correspondencia*, estas ecuaciones deben ser un caso general de las ecuaciones de Newton del campo gravitatorio. Esto nos permite establecer la estructura de las ecuaciones, pues deberán relacionar la geometría y las fuentes de materia-energía:

(Ec. Newton) $\nabla^2 \phi(t, \mathbf{x}) = -4\pi g(t, \mathbf{x}) \Rightarrow \text{Geometría (curvatura)} \propto \text{Distribución materia-energía}$

Además, siguiendo el *Principio de Covariancia*, las ecuaciones deben ser válidas para cualquier sistema de referencia, por lo que las ecuaciones de la gravitación en Relatividad General deben ser ecuaciones tensoriales:

$$\mathcal{G}(g) = K \cdot T$$

donde el tensor \mathcal{G} se denomina **tensor de Einstein** y T es el **tensor de energía-momento** (*stress-energy-momentum tensor* en inglés).

El tensor de energía-momento

El **tensor de tensión-energía** es una magnitud tensorial en la teoría de la Relatividad General que describe el flujo lineal de energía y de momento lineal. En general, este tensor se define empíricamente para cada sistema, teniendo en cuenta su interpretación física:

Definición 3.4.1. El **tensor de energía-momento** asociado a un sistema físico es un campo tensorial contravariante de segundo orden cuyas componentes se pueden generalizar de la siguiente forma:

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{cc} 3 - \text{densidad de energía} & \text{flujo de energía (2-densidades de corriente de energía)} \\ c \cdot 3 - \text{densidad de momentos} & 2 - \text{densidad de corriente de momentos} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{J}^1 & \mathcal{J}^2 & \mathcal{J}^3 \\ c\mathcal{P}^1 & \mathcal{S}^{11} & \mathcal{S}^{12} & \mathcal{S}^{13} \\ c\mathcal{P}^2 & \mathcal{S}^{21} & \mathcal{S}^{22} & \mathcal{S}^{23} \\ c\mathcal{P}^3 & \mathcal{S}^{31} & \mathcal{S}^{32} & \mathcal{S}^{33} \end{pmatrix}$$

Para desarrollar este tensor, lo primero que se nos ocurre es pensar en la magnitud asociada a la masa: la *densidad de masa*. Sin embargo, en relatividad la masa y la energía son equivalentes, por lo que debemos referirnos a *densidad de energía*, \mathcal{E} . Sin embargo, la energía no es una magnitud tensorial, sino la componente temporal de un tensor 1-contravariante: el cuádrimomento, definido en Relatividad Especial: $P = (E/c, P^1, P^2, P^3)$. Para poder describir el sistema en la Relatividad de Einstein es necesario considerar la *densidad del cuádrimomento*, $\mathcal{P} = (\mathcal{E}/c, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3)$. El problema ahora es que la densidad de cuádrimomento no es un cuádrivector, puesto que sus componentes no se transforman como las de un campo tensorial. Por lo tanto, la densidad de masa debe ser sustituida por una magnitud tensorial que sea compatible con las leyes de transformación tensorial para las densidades de \mathcal{P} . Para ello, debemos añadir a cada densidad (de energía o de momento) su correspondiente corriente.

Por lo tanto, tendremos que para la 3-densidad de energía \mathcal{E} hay que añadir las 2-densidades de corriente de energía: $(\mathcal{E}, \mathcal{J}^1, \mathcal{J}^2, \mathcal{J}^3)$, donde $\mathcal{J}^i = \frac{E/c}{TS_i}$. Por otro lado, para la 3-densidad de los momentos, \mathcal{P}^i , hemos de considerar también sus correspondientes 2-densidades de corriente de momento, $\mathcal{S}^{ij} = \frac{P^i}{TS_j}$. Hemos de tener en cuenta que $\frac{P^i}{T} = F^i$ representa la componente de una fuerza en la dirección espacial i , por lo que las componentes $\mathcal{S}^{ij} = F^i/S$ pueden entenderse como un *esfuerzo*. De hecho, estas componentes se identifican con las componentes del *tensor de esfuerzos* de mecánica de medios continuos.

Gracias a estas consideraciones, es fácil comprobar que el *tensor de energía-momento* es un $(0, 2)$ -campo tensorial simétrico, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ y verifica la condición de conservación $\text{div}(T) = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

El tensor de Einstein

Una vez definido de forma empírica el tensor de energía-momento, gracias a la relación que establecimos anteriormente, podemos obtener de forma axiomática el *tensor de Einstein*.

Definición 3.4.2. Llamaremos ***tensor de Einstein*** al *único* $(0, 2)$ -campo tensorial simétrico, llevado de producto por constantes, que verifica las siguientes condiciones:

1. Es un tensor puramente geométrico, por lo que se ha de construir a partir de la métrica g y el tensor de curvatura de Riemann Riem^∇ asociados al espacio-tiempo.
2. Es lineal en las componentes del tensor de Riemann, con el fin de garantizar un sistema de EDP's de primer grado, como las ecuaciones de Newton.
3. Es compatible con la *ley de conservación de energía-momento*: $\nabla_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$
4. Como consecuencia de 1), es nulo para un espacio-tiempo plano, $\mathcal{G} = 0$.

Siguiendo las características que debe cumplir el *tensor de Einstein*, tenemos que el tensor de segundo orden más general que se puede construir de forma puramente geométrica y siendo lineal en sus componentes es $\alpha Ric_{\mu\nu} + \beta Rg_{\mu\nu} + \gamma g_{\mu\nu}$ donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Imponiendo el resto de condiciones es fácil ver que $\gamma = 0$ para verificar 4) y que $b = -\frac{1}{2a}$ si queremos que la divergencia sea nula. Por lo tanto, las componentes del **tensor de Einstein** son:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}Ric_{\alpha\beta}$$

Ecuaciones de Einstein

Habiendo estudiado tanto el término geométrico, dado por el *tensor de Einstein*, como el término físico, dado por el *tensor de energía-momento*, ahora somos capaces de relacionar ambos elementos gracias a la **ecuación de Einstein**:

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}$$

donde la constante K se denomina *constante de acoplamiento* y es posible obtener su valor llevando la ecuación al límite newtoniano, $K = \frac{8\pi G}{c^4}$, donde G es la constante de gravitación universal. De esta forma, la ecuación de Einstein tendría el siguiente aspecto:

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Observación. En la definición axiomática que hemos tomado anteriormente, hemos impuesto que para el espacio-tiempo plano $\mathcal{G} = 0$ y, por lo tanto, era necesario que $\gamma = 0$ en el tensor genérico. Sin embargo, Einstein propuso una modificación a dicha solución con tal de conseguir una solución que diera un universo estático: $\Lambda g_{\mu\nu}$, donde la constante Λ es la **constante cosmológica**. Este término ha tenido una gran controversia a lo largo de la historia. Experiencias como la del *corrimiento al rojo* de las galaxias observados por *Edwin Hubble* sugirieron que el universo no era estático, lo que hizo a Einstein rechazar este término. Sin embargo, el descubrimiento de la *aceleración cósmica* sobre la expansión del Universo volvió a poner interés en dicha constante. Esta aceleración podría explicarse en términos físicos gracias a la presencia de una *energía del vacío* diferente de cero, que se suele nombrar como **energía oscura**. Por esta razón, aunque Einstein propuso esta constante cosmológica como un término independiente en su ecuación, puede ser incluida en el tensor de momento-energía si consideramos $T_{\mu\nu}^{\text{vacío}} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g_{\mu\nu}$. Incluyendo este término, las ecuaciones de Einstein quedan así:

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \Rightarrow Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{vacío}})$$

4. Subvariedades nulas en el espacio-tiempo

En las secciones anteriores hemos analizado las herramientas matemáticas y físicas que son necesarias para estudiar el espacio-tiempo de la Relatividad General. Una de las principales características de la nueva geometría que hemos presentado, la *geometría Lorentziana*, es la existencia de un nuevo tipo de subvariedad muy particular: las *subvariedades nulas*. Al contrario que en *geometría Riemanniana*, donde la métrica es siempre definida positiva, la nueva métrica Lorentziana se caracteriza por ser simplemente *no degenerada*. Como ya vimos en el capítulo 2, esto puede hacer que al restringir la métrica podamos obtener *degeneración*. Este tipo de subvariedades son de gran interés en el contexto de la Relatividad General, pues conceptos muy relevantes de la física están modelados por subvariedades nulas del espacio-tiempo. Por ejemplo, partículas en caída libre están representadas por curvas geodésicas nulas o los *horizontes de sucesos*, de los que hablaremos más adelante, que son de gran importancia en los agujeros negros, están representados por hipersuperficies nulas. Otros objetos relacionados con la causalidad del espacio-tiempo, que ya vimos en el capítulo anterior, como las fronteras de subvariedades achronal o los *horizontes de Cauchy* también pueden tener partes nulas. Por lo tanto, dada la importancia de este tipo de subvariedades, el objetivo de este capítulo es aprender a estudiar este tipo de subvariedades en el que al restringir obtenemos una métrica degenerada.

En este capítulo trabajaremos con subvariedades nulas, basándonos para su estudio en las referencias [17], [29] y [25]. Recordemos la definición formal de subvariedad nula y otras definiciones, que nos permitirán estudiar las subvariedades nulas:

4.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 4.1.1. Sea (\mathbb{M}, g) una variedad Lorentziana conexa, orientada y n -dimensional de signatura $(-+++)$ y sea $i : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{M}$ una inmersión. Diremos que el par $(\mathcal{N}, h = i^*g)$ es una **subvariedad nula** (*null submanifold*) de (\mathbb{M}, g) si el tensor $h = i^*g$, que es el tensor métrico inducido en la subvariedad, es degenerado en todos los puntos $p \in \mathcal{N}$.

Un caso concreto de subvariedades nulas que nos serán de gran interés son las **hipersuperficies nulas**, que definiremos a continuación:

Definición 4.1.2. Una **hipersuperficie nula**, \mathcal{H} , es una subvariedad diferenciable de codimensión 1 sobre la que la métrica $g : T_p\mathcal{H} \times T_p\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathcal{H}$ es degenerada.

Esta degeneración significa que existirá un vector no nulo, $K_p \in T_p\mathcal{N}$ tal que $g(K_p, x) = 0$, $\forall x \in T_p\mathcal{N}$. Este vector será el que nos dé la dirección de degeneración y, en particular, cumple:

- K_p es un vector nulo, es decir, $g(K_p, K_p) = 0$. Además, podemos escoger una orientación temporal del espacio-tiempo tal que K_p esté orientado hacia el futuro.
- K_p será ortogonal a $T_p\mathcal{N}$, en efecto, tendremos que $[K_p]^\perp = T_p\mathcal{N}$.

- Todo vector no nulo $x \in T_p\mathcal{N}$ que no sea un múltiplo de K_p es un vector espacial.

Así pues, este vector nos permitirá definir sobre nuestra hipersuperficie una dirección nula orientada hacia el futuro. Es importante observar lo siguiente:

Proposición 4.1.3. *Dado un punto $p \in \mathcal{N}$ de una subvariedad nula, consideramos el subespacio vectorial $K_p = T_p\mathcal{N} \cup T_p^\perp\mathcal{N}$. Este subespacio es el único espacio vectorial nulo 1-dimensional que contiene vectores que son tangentes y normales al mismo tiempo a la subvariedad.*

Demostración. Lo único que hace falta ver es que necesariamente K_p es un espacio vectorial 1-dimensional, pues el resto de afirmaciones vienen dadas por definición. La clave para demostrar esto último está en la propiedad de la métrica lorentziana. Para ello, razonaremos por reducción al absurdo. Consideremos dos vectores $v, w \in K_p$ y supongamos que son linealmente independientes, por lo que K_p no podría tener dimensión 1. En tal caso, tenemos que por ser linealmente independientes $g(v, w) = 0$. Además, como los vectores $v, w \in T_p\mathcal{N} \cup T_p^\perp\mathcal{N}$ pertenecen al espacio tangente y normal de la subvariedad, son vectores nulos por definición. Por lo tanto, tenemos que $g(v, v) = g(w, w) = 0$. Entonces, considerando la desigualdad de Schwarz, $g(v, w) = \sqrt{g(v, v)g(w, w)}$, tendríamos que se cumple la igualdad, pues todos los términos son ceros. Esto implica que ambos vectores han de ser linealmente dependientes. Así, K_p ha de ser 1-dimensional de cualquier forma. \square

De forma general, sabemos que si una subvariedad nula, \mathcal{N} , es de codimensión k en un espacio-tiempo, \mathbb{M} , de dimensión n , entonces para cada $p \in \mathcal{N}$ tenemos que los espacios tangente y normal, $T_p\mathcal{N}$ y $T_p^\perp\mathcal{N}$, son espacios vectoriales nulos de dimensión k y $(n - k)$, respectivamente. Además, podemos considerar el subespacio vectorial $K_p = T_p\mathcal{N} \cup T_p^\perp\mathcal{N}$ y su espacio ortogonal $K_p^\perp = T_p\mathcal{N} + T_p^\perp\mathcal{N}$ en $T_p\mathbb{M}$. Además, de la misma forma que es posible definir el *fibrado tangente* a partir del subespacio vectorial $T_p\mathcal{N}$, podemos definir los siguientes fibrados vectoriales a partir de los subespacios vectoriales que acabamos de ver:

Definición 4.1.4. Dada una subvariedad nula, \mathcal{N} , en un espacio-tiempo \mathbb{M} , podemos definir los siguientes *fibrados vectoriales*:

1. El **fibrado ortogonal** se define como $T^\perp\mathcal{N} = \bigcap_{p \in \mathcal{N}} \{v \in T_p\mathbb{M} \mid g(v, x) = 0, \forall x \in T_p\mathcal{N}\}$.
2. El **fibrado de línea nulo** (*null line bundle*) se define como $K = \bigcap_{p \in \mathcal{N}} (T_p\mathcal{N} \cup T_p^\perp\mathcal{N})$.
3. El *fibrado ortogonal* de K se define como $K^\perp = \bigcap_{p \in \mathcal{N}} K_p^\perp$ donde $K_p^\perp = \{u \in T_p\mathbb{M} \mid g(u, y) = 0, \forall y \in K_p\mathcal{N}\}$.

Para clarificar ideas, veamos un ejemplo de cálculo para un caso sencillo y común: el *espacio-tiempo de Minkowski*, (\mathbb{M}, η) .

Ejemplo 4.1.5.

Recordemos que el espacio-tiempo de Minkowski se trata de la variedad diferenciable \mathbb{R}^{3+1} dotada de la métrica $\eta = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$.

En este espacio-tiempo, podemos considerar la hipersuperficie nula $\mathcal{N}_1 = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t^2 = x^2 + y^2 + z^2, t > 0\}$, que es la parte positiva del *null double-cone* que ya vimos anteriormente. Fijemos un punto $p = (t, x, y, z) \in \mathcal{N}_1$ y consideremos $V_p = (v_t, v_x, v_y, v_z) \in T_p\mathcal{N}_1$. Para calcular cómo deben ser las coordenadas de V_p , observemos que la hipersuperficie \mathcal{N}_1 puede ser estudiada como el conjunto de nivel 0 de la función $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t, x, y, z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. En tal caso, sabemos que se ha de cumplir que $V_p(f) = 0$, $\forall p \in \mathcal{N}_1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V_p(f) &= -\frac{\partial f}{\partial t}v_t + \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z = -2tv_t + 2xv_x + 2yv_y + 2zv_z = 0 \iff \\ &\iff -tv_t + xv_x + yv_y + zv_z = 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación nos permite hallar una base vectorial para el espacio tangente. Las coordenadas de los siguientes vectores verifican claramente la ecuación:

$$v_1 = (x, t, 0, 0), \quad v_2 = (y, 0, t, 0), \quad v_3 = (z, 0, 0, t)$$

Claramente estos vectores están bien definidos y son linealmente independientes pues $t \neq 0$ para cualquier punto $p \in \mathcal{N}_1$. Por tanto, tenemos $T_p\mathcal{N}_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\forall p \in \mathcal{N}_1$. Para calcular el espacio normal a \mathcal{N}_1 en el punto $p \in \mathcal{N}_1$, $T_p\mathcal{N}_1$, simplemente hemos de aplicar la definición, $T_p^\perp\mathcal{N}_1 = \{v \in T_p\mathbb{R}^4 \mid \eta(u, v) = 0, \forall v \in T_p\mathcal{N}_1\}$. Como cualquier vector $v \in T_p\mathcal{N}_1$ se puede expresar como combinación lineal de v_1, v_2, v_3 ya que forman una base del espacio tangente, tenemos que $u = (u_t, u_x, u_y, u_z) \in T_p\mathbb{R}^4$ ha de cumplir que $\eta(u, v_i) = 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Esta condición nos da tres ecuaciones:

$$\eta(u, v_1) = 0 \iff -u_t x + u_x t = 0$$

$$\eta(u, v_2) = 0 \iff -u_t y + u_y t = 0$$

$$\eta(u, v_3) = 0 \iff -u_t z + u_z t = 0$$

Podemos expresar $u \in T_p\mathbb{R}^4$ en función de un parámetro libre, $u = (u_t, \frac{x}{t}u_t, \frac{y}{t}u_t, \frac{z}{t}u_t)$. Considerando $u_t = t$, tenemos que $T_p^\perp\mathcal{N}_1 = \langle (t, x, y, z) \rangle$. Si observamos que $u = \frac{x}{t}v_1 + \frac{y}{t}v_2 + \frac{z}{t}v_3$, se ve claramente que $u \in T_p^\perp\mathcal{N}_1$ puede expresarse como combinación lineal de la base de $T_p\mathcal{N}_1$. Por lo tanto, $K_p = T_p\mathcal{N}_1 \cup T_p^\perp\mathcal{N}_1 = T_p\mathcal{N}_1$ y $K_p^\perp = T_p\mathcal{N}_1$. En este caso tenemos que el *null line bundle* coincide con el espacio ortogonal y $u = (t, x, y, z) \in K_p$ es un vector nulo que es tangente y ortogonal a la vez.

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 \cup \{x = 0\}$$

espiral dentro de \mathcal{N}_1

Una vez vistos ejemplos sobre los diferentes fibrados con los que trabajaremos en las subvariedades nulas, es importante que veamos ciertas propiedades de estas subvariedades y la importancia de la causalidad definida en el capítulo anterior.

Para ello, recordemos que una subvariedad achronal era aquella en la que ninguna curva de tipo tiempo interseca dos veces a la subvariedad. Esta característica nos ayuda a caracterizar de forma alternativa una subvariedad nula. Veámoslo en el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sea \mathbb{M} un espacio-tiempo en el que consideramos una subvariedad localmente achronal, \mathcal{N} , tal que por todo punto $p \in \mathcal{N}$ pasa una curva regular nula, $\gamma_p : I \rightarrow \mathbb{M}$, $\gamma(0) = p$, contenida en la subvariedad $\gamma_p(\text{int } I) \subset \mathcal{N}$. Entonces, \mathcal{N} es una subvariedad nula de \mathbb{M} .*

Demostración. La demostración este teorema es muy sencilla y puede hacerse por reducción al absurdo. Supongamos que existe algún punto $p \in \mathcal{N}$ tal que su espacio tangente, $T_p\mathcal{N}$, no es un espacio vectorial nulo. Entonces, como dicho espacio contiene un vector nulo por hipótesis, $\dot{\gamma}_p(0)$, ha de ser un espacio vectorial de tipo tiempo. Por lo tanto, podemos encontrar un vector de tipo tiempo en $x \in T_p\mathcal{N}$ tal que es el vector tangente a una curva en un entorno del punto $p \in \mathcal{N}$. De esta forma, existe una curva de tipo tiempo que permite unir p con otro punto de su entorno, entrando en contradicción con el hecho de que \mathcal{N} es una subvariedad localmente achronal. \square

Hemos visto cómo características de la causalidad de la subvariedad nos han permitido dar condiciones para la nulidad de la misma. Ahora intentaremos encontrar características causales dada una subvariedad nula. Para ello, necesitaremos la siguiente proposición sobre el *null line bundle*:

Proposición 4.1.6. *Dada una subvariedad nula \mathcal{N} en un espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) , el null line subbundle K es orientable.*

Demostración. Sea $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ un campo vectorial en \mathbb{M} de tipo tiempo orientado hacia el futuro. Entonces, cualquier campo $U \in \mathfrak{X}(K)$ de K que verifique $g(U_p, V_p) = -1$, $\forall p \in \mathcal{N}$ es un campo nulo orientado hacia el futuro. Este campo nos permite definir una orientación sobre K . \square

Podemos observar que, además, como K es el único *null line subbundle* de $T\mathcal{N}$, dicho vector U será un campo vectorial nulo dirigido hacia el futuro tangente a \mathcal{N} definido de forma única (*salvo reescalamiento*). Gracias a esta proposición obtenemos el siguiente corolario, de gran importancia:

Corolario 4.1.1. *Toda hipersuperficie nula, \mathcal{N} , en un espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) es orientable.*

Demostración. Para demostrarlo, veremos que es posible encontrar una forma de volumen sobre la hipersuperficie que no se anula en ningún punto de la misma. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ un campo vectorial unitario de tipo tiempo sobre el espacio-tiempo n -dimensional \mathbb{M} y sea $\omega \in \Omega^n(\mathbb{M})$ una forma de volumen en \mathbb{M} . Entonces, como \mathcal{N} es una hipersuperficie nula, el campo X es transversal a la misma. Así, tenemos que $i_X\omega$ es una $(n-1)$ -forma diferencial que no se anula sobre \mathcal{N} , por lo que la hipersuperficie \mathcal{N} es orientable. \square

4.2 Generadores y geodésicas nulas

Con el objetivo de poder caracterizar mejor las subvariedades nulas a través de las construcciones geométricas que hemos estudiado y así poder comprender mejor este tipo de subvariedades, presentamos las siguientes definiciones, que serán de gran importancia en lo que queda de capítulo:

Definición 4.2.1. Sea (\mathbb{M}, g) un espacio-tiempo en el que consideramos la subvariedad nula $\mathcal{N} \subset \mathbb{M}$. Sea $U \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ un campo vectorial nulo tangente a la subvariedad. Entonces, diremos que una *curva integral inextendible* del campo U es un **generador nulo** (*null generator*) de \mathcal{N} .

Ya habíamos hablado de *generadores* al estudiar la causalidad como una forma de caracterizar ciertos subconjuntos del espacio-tiempo. Ahora simplemente hemos particularizado la definición para el caso de subvariedades nulas. Veamos ahora la definición de otra propiedad importante:

Definición 4.2.2. Sea (\mathbb{M}, g) un espacio-tiempo. Diremos que una subvariedad nula \mathcal{N} es una **subvariedad geodésica nula** si $\nabla_U U = fU$, donde $U \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ es un campo vectorial nulo tangente a la variedad y $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$ es una función diferenciable.

Podríamos cuestionarnos si esta definición nos da un concepto de *subvariedad geodésica nula* que esté bien definido. Para ello, simplemente hemos de verificar que para cualquier otro campo vectorial nulo tangente a la subvariedad, $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ también tenemos que $\nabla_V V = hV$, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$. Esto claramente es así, pues como $V = kU$ para alguna función $k \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$, tenemos que

$$\nabla_V V = \nabla_{kU} kU = k\nabla_U kU = k(U(k)U + k\nabla_U U) = kU(k)U + k^2 fU = (kU(k) + k^2 f)U = hU$$

por lo que esta propiedad está bien definida.

Si intentamos relacionar ambas definiciones, es fácil ver que si \mathcal{N} es una subvariedad geodésica nula, entonces cualquier generador U de esta puede ser parametrizado para ser una geodésica nula, es decir, $\nabla_U U = fU$ para cierta función diferenciable. Sin embargo, la propiedad de ser una variedad geodésica nula no es cierta para cualquier variedad nula. Encontraremos que existen variedades nulas que no tienen por qué ser geodésicas nulas. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 4.2.3. Consideremos el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski, (\mathbb{R}^{2+1}, η) y sea $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3$ la subvariedad nula de dimensión 1 cuya parametrización viene dada por:

$$\gamma : I = (0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(\theta) = (\theta, \sin(\theta), \cos(\theta)) = (t, x, y)$$

Podemos ver que claramente se trata de una subvariedad nula, pues si calculamos el vector tangente a la parametrización, $\gamma'(\theta) = (1, \cos(\theta), -\sin(\theta))$ tenemos que

$$\eta(\gamma'(\theta), \gamma'(\theta)) = -1 \cdot 1 + \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) + (-\sin(\theta)) \cdot (-\sin(\theta)) = -1 + 1 = 0$$

Intentemos calcular ahora la derivada covariante $\nabla_{\gamma'} \gamma'$ considerando la conexión de Levi-Civita en \mathbb{R}^3 . Para ello tenemos que expresar

$$\gamma' = \frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

Entonces, teniendo en cuenta que los símbolos de Christoffel cumplen $\Gamma_{ij}^k = 0$, $\forall i, j, k \in \{t, x, y\}$ ya que la métrica η es constante, tenemos que:

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \gamma'(1)\frac{\partial}{\partial t} + \gamma'(y)\frac{\partial}{\partial x} + \gamma'(-x)\frac{\partial}{\partial y} = -x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \neq f\gamma'$$

Por lo tanto, \mathcal{N} es una subvariedad nula que no es geodésica nula.

Vista la definición de geodésica nula, podemos particularizar el estudio para una hipersuperficie nula y exponer la siguiente proposición, que será de gran importancia:

Proposición 4.2.4. *Sea \mathcal{H} una hipersuperficie nula en un espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) cuya conexión asociada ∇ . Sea $K \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$ un campo vectorial sobre \mathcal{H} nulo dirigido hacia el futuro. Entonces, las curvas integrales de K son curvas geodésicas nulas.*

Demostración. Simplemente necesitamos probar que $\nabla_K K = \lambda K$, pues en general las curvas integrales son *pre-geodésicas* (es decir, geodésicas tras una re-parametrización adecuada). Para ello, veamos que $\nabla_K K \perp T_p \mathcal{H}$, $\forall p \in \mathcal{H}$. Basta con verificar que $g(\nabla_K K, x) = 0$, $\forall x \in T_p \mathcal{H}$. Extendiendo el vector $x \in T_p \mathcal{H}$ haciéndolo invariante a lo largo del flujo de K , tenemos que $[K, x] = \nabla_K x - \nabla_x K = 0$. Además, como x se mantiene tangente en todo momento a la hipersuperficie, tenemos que $g(K, x) = 0$. Por lo tanto, derivando esta última expresión tenemos que:

$$0 = \nabla_K g(K, x) = g(\nabla_K K, x) + g(K, \nabla_K x)$$

y podemos calcular entonces

$$g(\nabla_K K, x) = -g(K, \nabla_K x) = -g(K, \nabla_x K) = -\frac{1}{2}\nabla_x g(K, K) = 0$$

□

Así, para estudiar el “comportamiento” de las hipersuperficies nulas simplemente podemos estudiar cómo varía el campo vectorial K a lo largo de la hipersuperficie de estudio. Como el campo K es ortogonal a la hipersuperficie, en cierto modo es paralelo al estudio que hicimos de las hipersuperficies en geometría (semi-)riemanniana gracias a la *aplicación de Weingarten* y la *segunda forma fundamental*. Nos gustaría poder estudiar de forma análoga estas propiedades en las subvariedades nulas, introduciendo las analogías nulas de ambas definiciones. Para ello, tendremos que introducir la siguiente relación de equivalencia entre vectores tangentes a la hipersuperficie, $x, y \in T_p \mathcal{H}$:

$$x = y \text{ mod } K \iff x - y = \lambda K, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

y denotemos las clases de equivalencia como $\bar{x} = \pi(x)$, $\bar{y} = \pi(y)$, donde $\pi : T_p \mathcal{H} \rightarrow T_p \mathcal{H}/K$ es la aplicación de paso al cociente. Así, podemos definir el fibrado vectorial cociente:

$$T\mathcal{H}/K = \bigcup_{p \in \mathcal{H}} T_p \mathcal{H}/K = \{\bar{x} \mid x \in T_p \mathcal{H}\}$$

que es un fibrado vectorial de dimensión $n - 1$ ($n = \dim(\mathbb{M})$) sobre \mathcal{H} y no depende de la elección del campo nulo K .

Sobre este fibrado podemos considerar la métrica, \bar{g} , una métrica positiva definida inducida por g , que viene dada por la expresión:

$$\bar{g} : T_p\mathcal{H}/K \times T_p\mathcal{H}/K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = g(x, y)$$

Es fácil ver que esta métrica está bien definida, pues si consideramos $x' = x \bmod K$, $y' = y \bmod K$ tenemos que

$$g(x', y') = g(x + \alpha K, y + \beta K) = g(x, y) + \beta g(x, K) + \alpha g(K, y) + \alpha \beta g(K, K) = g(x, y)$$

También podemos definir la *aplicación de Weingarten nula*, $\bar{\mathcal{W}}_K$, sobre \mathcal{H} respecto de K como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_K : T_p\mathcal{H}/K &\rightarrow T_p\mathcal{H}/K \\ \bar{\mathcal{W}}(x) &= \overline{\nabla_x K} \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta aplicación está bien definida, pues si $\bar{x} = \bar{y}$ tenemos que $\bar{\mathcal{W}}(\bar{x}) = \bar{\mathcal{W}}(\bar{y})$. Sin embargo, el valor de esta aplicación en un punto $p \in \mathcal{H}$ está determinada por el valor de K en dicho punto. Si consideramos otro campo tangente nulo dirigido hacia el futuro $\bar{K} = fK$, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$, $f > 0$ y estudiamos la aplicación de Weingarten asociada, tenemos que

$$\overline{\bar{\mathcal{W}}}(\bar{x}) = \overline{\nabla_x f K} = x(f)K + f \nabla_x K \implies \overline{\bar{\mathcal{W}}}(\bar{x}) = f \nabla_x K \bmod K, \forall x \in T_p\mathcal{H}$$

por lo que tenemos que ambas aplicaciones son las mismas en el fibrado cociente, pues $\overline{\bar{\mathcal{W}}} = f \bar{\mathcal{W}}$.

De la misma forma, podemos definir la *segunda forma fundamental nula* sobre \mathcal{H} asociada al campo K , \mathcal{K}_K , como la aplicación bilineal:

$$\mathcal{K}_K(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{g}(\bar{\mathcal{W}}(\bar{x}), \bar{y}) = g(\nabla_x K, y)$$

Con esta definición, diremos que la hipersuperficie \mathcal{H} es **totalmente geodésica** si y solo si $\mathcal{K}_K \equiv 0$. En tal caso, toda geodésica que empiece siendo tangente a \mathcal{H} permanece en \mathcal{H} para todo instante de tiempo. Esto se debe a que al ser una hipersuperficie totalmente geodésica, la restricción de la *conexión de Levi-Civita* del espacio-tiempo \mathbb{M} permite definir una conexión sobre \mathcal{H} .

Por último, veremos la definición de la *curvatura media nula* de \mathcal{H} respecto el campo K , un campo escalar suave sobre \mathcal{H} definido como $\theta = \text{Tr}(\bar{\mathcal{W}})$. Esta magnitud permite estudiar la expansión de los generadores nulos de la hipersuperficie \mathcal{H} hacia el futuro y nos será de gran ayuda a la hora de definir los *agujeros negros*.

Análogamente a este desarrollo, podemos definir los fibrados vectoriales cociente asociados a $T_p^\perp \mathcal{H}$ y K_p^\perp para todo punto $p \in \mathcal{H}$:

- $\overline{T^\perp \mathcal{H}} = T^\perp \mathcal{H}/K$ el fibrado cociente definido por la proyección canónica $\pi_{\overline{T^\perp \mathcal{H}}} : T^\perp \mathcal{H} \rightarrow \overline{T^\perp \mathcal{H}}$.
- $\overline{K^\perp} = K^\perp/K$ el fibrado cociente definido por la proyección canónica $\pi_{\overline{K^\perp}} : K^\perp \rightarrow \overline{K^\perp}$.

En estos espacios cociente se pueden desarrollar las definiciones análogas al ejemplo $T_p \mathcal{H}/K$.

Hemos visto que toda hipersuperficie nula es una subvariedad geodésica nula, lo que nos ha permitido obtener un fibrado vectorial riemanniano donde hemos solucionado la degeneración. Sin embargo, en general, no toda subvariedad nula cumple la condición de ser geodésica nula. Por eso, estamos interesados en poder establecer una condición necesaria que nos permita averiguar cuándo nuestra subvariedad nula será o no geodésica nula. Para ello, podemos empezar dando una caracterización de este tipo de subvariedades, para que lo necesitaremos la siguiente definición:

Definición 4.2.5. Sea \mathcal{N} una subvariedad nula en el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) dotado de su *conexión de Levi-Civita*, ∇ , y sea $U \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ un campo vectorial nulo tangente a la subvariedad. Así, podemos definir un homomorfismo entre fibrados tal que:

$$\nabla U : TS \rightarrow K^\perp$$

$$(\nabla U)v := \nabla_v U$$

Esta aplicación está bien definida ya que $\nabla_v U \in K^\perp$ para todo $v \in TS$ puesto que $g(\nabla_v U, U) = 0, \forall v \in TS$.

Con esta definición ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.2. Sea \mathcal{N} una subvariedad nula en el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) . Entonces, \mathcal{N} es una subvariedad geodésica nula si y sólo si $\nabla_u X \in K^\perp$ para todo $u \in K, X \in \mathfrak{X}^\perp(\mathcal{N})$.

Demostración. Sea U un campo vectorial nulo tangente a \mathcal{N} tal que $U_p = u$ para un punto $p \in \mathcal{N}$. Sabemos por definición que $\nabla_u U \in K$ si y solo si $g(\nabla_u U, x) = 0, \forall x \in K_p^\perp$. Entonces, si consideramos $Y \in \mathfrak{X}^\perp(\mathcal{N})$, tenemos

$$g(\nabla_U U, Y) = \nabla_U g(U, Y) - g(U, \nabla_U Y) = -g(U, \nabla_U Y)$$

ya que $g(U, Y) = 0$ por definición. De este resultado, obtenemos que $g(\nabla_U U, Y) = 0$ si y solo si $\nabla_U Y \in \Gamma(K^\perp)$. Por otra parte, si tomamos $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$:

$$\begin{aligned} g(\nabla_U U, X) &= \nabla_U g(U, X) - g(U, \nabla_U X) = -g(U, \nabla_U X) = -g(U, \nabla_X U + [U, X]) = \\ &= -g(U, \nabla_X U) + g(U, [U, X]) = -g(U, \nabla_X U) = -\frac{1}{2} \nabla_X g(U, U) = 0 \end{aligned}$$

puesto que $g(U, X) = g(U, [U, X]) = g(U, U) = 0$. Por lo tanto, tenemos que $\nabla_U U$ es ortogonal a cualquier campo de K^\perp (de forma que $\nabla_U U = fU$ para cierta función diferenciable) si y solo si $\nabla_U Y \in \Gamma(K^\perp)$ para todo campo $Y \in \mathfrak{X}^\perp(\mathcal{N})$. \square

Este teorema nos da una condición necesaria y suficiente para saber si una subvariedad es geodésica nula. Sin embargo, esta condición puede ser “aparatosaz pesada de comprobar, además de implicar diferentes fibrados vectoriales. Por lo tanto, intentaremos encontrar otra condición suficiente que nos permita averiguar si una subvariedad es geodésica nula o no.

Definición 4.2.6. Dada una subvariedad nula, \mathcal{N} , en el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) dotado de su *conexión de Levi-Civita*. Diremos que es una **subvariedad nula irrotacional** si $\nabla_v U \in T\mathcal{N}$, $\forall v \in T\mathcal{N}$ donde $U \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ es un campo vectorial nulo tangente a la subvariedad.

Si queremos comprobar que las *subvariedades nulas irrotacionales* están bien definidas solo hemos de comprobar que si $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ es otro campo vectorial nulo tangente a la variedad entonces $\nabla_v V \in T\mathcal{N}$, $\forall v \in T\mathcal{N}$. De hecho, análogamente a como hemos visto anteriormente, como $V = kU$ para cierta función $k \in C^\infty(\mathcal{N})$, tenemos que $\nabla_v V = \nabla_v kU = v(k)U + k\nabla_v U \in T\mathcal{N}$ para todo $v \in TS$.

Observación. Observemos que si consideramos el homeomorfismo entre fibrados vectoriales $\nabla U : TS \rightarrow K^\perp$ en el caso de un subvariedad nula irrotacional, tenemos que se trata de un homeomorfismo de TS a TS .

Para poder relacionar este nuevo tipo de subvariedad nula con las subvariedades geodésicas nulas, necesitaremos enunciar el siguiente teorema, el cual no demostraremos, pero cuyos corolarios serán de gran importancia:

Teorema 4.3. Sea \mathcal{N} una subvariedad nula en el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) dotado de su *conexión de Levi-Civita*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- \mathcal{N} es una subvariedad nula irrotacional en \mathbb{M} .
- $\nabla_x X \in K^\perp$, $\forall x \in T\mathcal{N}, \forall X \in \mathfrak{X}^\perp(\mathcal{N})$.
- $\nabla_u X \in K^\perp$, $\forall u \in K, \forall X \in \mathfrak{X}^\perp(\mathcal{N})$.
- $\nabla_u U \in K^\perp$, $\forall u \in K, \forall U \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$.

Por lo tanto, como corolarios directos de este teorema tenemos:

Corolario 4.3.1. Toda subvariedad nula, \mathcal{N} , irrotacional es una variedad geodésica nula.

Demostración. La demostración pasa por la unión de los resultados de los dos teoremas previos. □

Corolario 4.3.2. Toda hipersuperficie nula, \mathcal{H} , en un espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) dotado de su *conexión de Levi-Civita*, es una subvariedad nula irrotacional.

Demostración. Para demostrarlo, veremos que toda hipersuperficie nula verifica la caracterización de subvariedad geodésica nula dada por el *teorema 4.2*, $\nabla_x X \in K^\perp$, $\forall x \in T\mathcal{N}, \forall X \in \mathfrak{X}^\perp(\mathcal{N})$. Así, por el *teorema 4.2* tendremos la equivalencia con ser una subvariedad nula irrotacional.

Observemos que si \mathcal{H} es una hipersuperficie nula, entonces tenemos que $T^\perp \mathcal{H} = K$. Por lo

tanto, si $X \in \mathfrak{X}^\perp(\mathcal{H})$ tenemos que ha de ser múltiplo de U , el campo vectorial nulo tangente a \mathcal{H} , $X = fU$ para cierta función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$. Por lo tanto, si consideramos un campo vectorial tangente $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$, tenemos:

$$\nabla_V X = \nabla_V fU = V(f)U + f\nabla_V U \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}) \subset \Gamma(K^\perp)$$

Por lo tanto, como $\nabla_V X \in \Gamma(K^\perp)$, tenemos que \mathcal{H} es irrotacional. \square

En la demostración del último corolario hemos visto que ser una hipersuperficie nula es equivalente a ser irrotacional y, como consecuencia, ser subvariedad geodésica nula. Así, tenemos que una condición necesaria y suficiente que nos permitirá encontrar fácilmente subvariedades nulas geodésicas es el hecho de ser una hipersuperficie nula del espacio-tiempo. Este resultado no es nada nuevo, pues empezamos esta sección demostrando de forma alternativa dicha propiedad.

4.3 Reparametrización geodésica y separación causal

Hasta ahora nos hemos centrado en el estudio de subvariedades geodésicas nulas y hemos visto que para este tipo de subvariedades todo generador puede ser re-parametrizado para que sea geodésico nulo. Sin embargo, nos gustaría poder re-parametrizar este campo vectorial con tal que sea un campo geodésico en el sentido estricto. Esto no siempre será posible, a continuación intentaremos desarrollar condiciones suficientes para que sea posible este re-escalamiento.

Para ello, comenzaremos con la siguiente definición, que formaliza una propiedad que ya vimos al estudiar la causalidad del espacio-tiempo en el capítulo anterior:

Definición 4.3.1. En el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) consideramos la subvariedad nula \mathcal{N} . Sea $\mathcal{H} \subset \mathcal{N}$ una subvariedad de tipo espacio de codimensión 1 en \mathcal{N} , que denominaremos por brevedad *hipersuperficie de tipo espacio* de \mathcal{N} . Diremos que \mathcal{N} es **causalmente separable** por \mathcal{H} si existe un difeomorfismo $E : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in \mathcal{H}$ tenemos que $E^{-1}(\{p\} \times \mathbb{R})$ es un generador nulo de la subvariedad \mathcal{N} .

Ya habíamos estudiado que en los espacio-tiempos *globalmente hiperbólicos*, teníamos que era posible considerar dicha foliación para la hipersuperficie de Cauchy. Además, vimos que la recta real podía ser considerada como el eje temporal. Ahora vemos que este tipo de subvariedades son de gran importancia ya que, como veremos en el siguiente teorema, permitirán re-parametrizar el campo vectorial tangente para que sea geodésico.

Teorema 4.4. *En el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) consideramos la subvariedad geodésica nula, \mathcal{N} , y un campo vectorial nulo tangente a \mathcal{N} , U . Si \mathcal{N} es una subvariedad causalmente separable por una hipersuperficie \mathcal{H} de \mathcal{N} de tipo espacio, entonces el campo vectorial U puede ser re-escalado para ser un campo vectorial nulo en \mathcal{N} .*

Por eso, es importante intentar obtener previamente condiciones suficientes para que una subvariedad sea causalmente separable por una hipersuperficie de tipo espacio:

Proposición 4.3.2. *Sea \mathcal{N} una subvariedad nula en un espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) sobre la que consideramos una hipersuperficie \mathcal{H} de tipo espacial tal que todo generador nulo de \mathcal{N} interseca con \mathcal{H} en un único valor. Entonces \mathcal{N} es causalmente separable por \mathcal{H} .*

Demostración. Consideremos un campo vectorial nulo U tangente a la subvariedad \mathcal{N} . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que U es un campo vectorial completo (en efecto, si U no es completo siempre existirá una función diferenciable positiva tal que fU lo es). Recordemos que decimos que un campo vectorial es *completo* si todas las curvas de su flujo existen para todo instante de tiempo. En tal caso, consideremos el flujo del campo U que denotaremos como F_U^t . Entonces, podemos definir la aplicación $E^{-1} : \mathcal{H} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$ tal que $E^{-1}(p, t) = F_U^t(p)$. Está claro que esta aplicación es un difeomorfismo ya que, por hipótesis, todo generador nulo interseca con \mathcal{H} en un único parámetro y las curvas integrales del flujo F_U^t pueden ser consideradas generadores nulos de \mathcal{N} ya que U es un campo vectorial nulo tangente. Por lo tanto, \mathcal{N} es difeomorfa a $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ y tenemos que \mathcal{N} es causalmente separable por \mathcal{H} . \square

Esta proposición nos da una condición suficiente para que una subvariedad sea causalmente separable, que es lo que nos permitirá poder re-parametrizar las geodésicas nulas. Sin embargo, nos gustaría encontrar una condición menos restrictiva. Para ello, podemos imponer condiciones topológicas sobre las subvariedades que nos permitirán relajar la condición de intersecar en un solo parámetro por que simplemente exista la intersección. Podemos verlo en la siguiente proposición:

Proposición 4.3.3. *Sea \mathcal{N} una subvariedad nula simplemente conexa en el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) y sea \mathcal{H} una hipersuperficie conexa y cerrada (con la topología subespacio en \mathcal{N}) de tipo espacial en \mathcal{N} . Entonces, cualquier generador nulo de \mathcal{N} interseca \mathcal{H} en un único valor.*

Gracias a esta proposición, en la que consideramos propiedades topológicas de las subvariedades, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.5. *Sea \mathcal{N} una subvariedad nula simplemente conexa en el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) y sea \mathcal{H} una hipersuperficie conexa y cerrada (con la topología subespacio en \mathcal{N}) de tipo espacial en \mathcal{N} tal que todo generador nulo de la subvariedad \mathcal{N} interseca con la hipersuperficie \mathcal{H} . Entonces, la subvariedad \mathcal{N} es causalmente separable por \mathcal{H} y \mathcal{N} es difeomorfa a $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$.*

Demostración. Si consideramos un campo vectorial nulo, U , tangente a la subvariedad \mathcal{N} tenemos que, por hipótesis, sus curvas integrales (generadores nulos de la subvariedad) intersecan \mathcal{H} . Por la proposición 4.0.15 tenemos que corta en un único valor. Usando entonces la proposición 4.0.14 ya tendríamos que \mathcal{N} es separable causalmente por \mathcal{H} . \square

Antes de acabar con la re-parametrización de subvariedades geodésicas nulas para obtener geodésicas, es interesante observar que no siempre es posible encontrar una hipersuperficie que permita separar causalmente a la subvariedad. Sin embargo, en el caso de que el espacio-tiempo en el que trabajemos sea *fuertemente causal*, es posible encontrar entornos tubulares en los que la subvariedad nula \mathcal{N} es una subvariedad causalmente separable. Definamos formalmente estos entornos:

Definición 4.3.4. Sea \mathcal{N} una subvariedad nula en el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) y sea U un campo vectorial nulo tangente a \mathcal{N} tal que sus curvas integrales, γ_U , son generadores nulos de la subvariedad. En tal caso, diremos que un entorno abierto Ω_γ en \mathcal{N} que contiene al generador γ_U es un **entorno elemental de γ_U** si existe una hipersuperficie espacial \mathcal{H}_γ de \mathcal{N} y un difeomorfismo $E_\gamma : \Omega_\gamma \rightarrow \mathcal{H}_\gamma \times \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in \mathcal{H}_\gamma$ tenemos que $E^{-1}(\{p\} \times \mathbb{R})$ es un generador nulo de \mathcal{N} que pasa por el punto $p \in \mathcal{H}_\gamma$.

Con esta definición lo que hemos conseguido es encontrar una subvariedad nula, Ω_γ , que hemos llamado entorno elemental, sobre el que la hipersuperficie \mathcal{H}_γ sí separa causalmente la subvariedad. Así, tenemos que, por el Teorema visto anteriormente, es posible re-parametrizar las curvas γ_U para que sean geodésicas en la subvariedad Ω_γ . Sin embargo, no sabemos nada sobre la existencia de este entorno elemental: si existe siempre, si hay subvariedades para las que no es posible encontrarlo, bajo qué condiciones existe, etc. Por lo que podemos cerrar este desarrollo teórico con la siguiente proposición sobre la existencia de los entornos elementales:

Proposición 4.3.5. *Todo generador nulo de una subvariedad nula \mathcal{N} en un espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) fuertemente causal tiene un entorno elemental.*

4.4 Killing horizons

Nos gustaría terminar este capítulo sobre subvariedades nulas presentando un tipo muy importante de hipersuperficies nulas: los **horizontes de Killing**. Veamos la definición formal:

Definición 4.4.1. Diremos que una hipersuperficie nula, \mathcal{H} , en un espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) es un **horizonte de Killing** si admite un vector normal $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ tal que es un vector de Killing.

Recordemos que habíamos visto en el *Capítulo 1* que un campo de Killing en el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) verifica que $\mathcal{L}_\xi g = 0$.

En general, al ser el campo de Killing el vector normal a una hipersuperficie nula, hemos visto que ha de verificar ser *geodésico nulo*, es decir, $\nabla_\xi \xi = \kappa \xi$. La constante $\kappa \in \mathbb{R}$ se denomina **surface gravity**. Si el vector de Killing es, además, geodésico: $\nabla_\xi \xi = 0$, entonces diremos que \mathcal{H} es un horizonte extremal.

Observación. La definición que hemos tomado para nuestro vector de Killing considera $\mathcal{L}_\xi g = 0$, donde g es la métrica en todo el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) . Podríamos haber considerado la métrica restringida a la hipersuperficie nula, \mathcal{H} , pero se puede ver que se obtiene de forma equivalente que $\mathcal{K} = 0$.

Con el objetivo de entender un poco mejor esta estructura geométrica tan importante, veamos algunas propiedades de los *horizontes de Killing*:

1. **Anulación de la segunda forma fundamental, $\mathcal{K} = 0$.** Tal y como vimos en el capítulo anterior, sobre la hipersuperficie nula \mathcal{H} podemos definirnos el siguiente $(0, 2)$ -campo tensorial:

$$\mathcal{K}_\xi(x, y) = g(\nabla_x \xi, y)$$

donde $x, y \in T_p\mathcal{H}$, $p \in \mathcal{H}$ son vectores tangentes a la hipersuperficie. Sea K el campo vectorial nulo tangente a la hipersuperficie \mathcal{H} . Ya vimos que, en efecto, este campo era geodésico y, además, es normal a la hipersuperficie. Por lo tanto, como el valor de \mathcal{K}_ξ depende solo de la restricción del campo ξ a la hipersuperficie (pues opera con vectores tangentes a ella) y sabemos que K es único salvo múltiplos. Por lo tanto, podemos considerar que

$$\xi = f \cdot K$$

donde f es una función diferenciable (en particular, será $f = -g(\xi, K)$). De esta forma, podemos expresar la segunda forma fundamental restringida a \mathcal{H} como

$$\mathcal{K}_\xi(x, y) = g(\nabla_x \xi, y) = g(\nabla_x (f \cdot K), y) = g(x(f)K, y) + g(f \nabla_x K, y) = f \cdot g(\nabla_x K, y) = f \cdot \mathcal{K}(x, y)$$

Por lo tanto, como la segunda forma fundamental \mathcal{K} del espacio-tiempo era un tensor simétrico, tenemos que \mathcal{K}_ξ también ha de serlo. Sin embargo, debido a que ξ es un campo de Killing y verifica que $\mathcal{L}_\xi g = 0$, tenemos que la aplicación

$$\nabla_\xi : T\mathcal{H} \rightarrow K^\perp$$

$$\nabla_\xi : X \mapsto \nabla_X \xi$$

es una aplicación antisimétrica ya que $g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = 0$ para cualesquiera dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ del espacio-tiempo. Así, tenemos que la aplicación \mathcal{K}_ξ sería una aplicación simétrica y antisimétrica al mismo tiempo. Esto implica que, en efecto, $\mathcal{K}_\xi \equiv 0$. Así, como hemos visto la segunda forma fundamental restringida a la hipersuperficie, \mathcal{K}_ξ , es un múltiplo de la segunda forma fundamental en todo el espacio-tiempo, \mathcal{K} , tenemos que efectivamente $\mathcal{K} \equiv 0$.

2. “**Bifurcate sphere**”. Recordemos que, en general, $\nabla_\xi \xi = \kappa \xi$ y $\nabla_K K = 0$ y $\xi = f \cdot K$. Entonces, es fácil ver que:

$$\nabla_\xi \xi = f \nabla_K (f K) = f(K(f))K + f^2 \nabla_K K = K(f)f\xi = K(f)\xi$$

Por lo tanto, tenemos que $\kappa = K(f)$ y podemos expresar f como:

$$f(t) = \kappa \cdot t + k \implies \xi = (\kappa \cdot t + k) \cdot K$$

donde t es el parámetro afín de K y $k \in \mathbb{R}$ es una constante real. Entonces, si $\kappa \neq 0$, (es decir, no es un horizonte extremal), podemos considerar secciones de \mathcal{H} definidas por $t = -\frac{k}{\kappa}$, que se denominaremos **bifurcate sphere**. La importancia de estas secciones reside en que sobre este punto el generador del horizonte se anula, es decir, $\xi \equiv 0$, en lugar de ser simplemente nulo.

3. Existe una relación importante entre la derivada covariante y el tensor de curvatura de Riemann en el caso de trabajar con un vector de Killing. Este resultado viene dado por la siguiente proposición, la cual no demostraremos pero de la cual obtendremos importantes resultados:

Proposición 4.4.2. *Dado un vector de Killing ξ del espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) , tenemos que para dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ se cumple:*

$$\nabla_X \nabla_Y \xi = \nabla_{(X,Y)}^2 \xi = \text{Riem}(X, \xi)Y$$

Nos centraremos en ver los resultados que podemos obtener gracias a esta proposición:

Corolario 4.5.1. *Sea ξ un vector de Killing del espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) . Entonces, para todos dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ tenemos que se cumple la siguiente identidad:*

$$\mathcal{L}_\xi(\nabla_X Y) = \nabla_{\mathcal{L}_\xi X} Y + \nabla_X(\mathcal{L}_\xi Y)$$

Demostración. Sabiendo que $\mathcal{L}_\xi X = \nabla_\xi X - \nabla_X \xi$ y usando el resultado de la proposición 4.4.2 se obtiene la identidad. \square

Otro resultado muy importante de la anterior proposición y que afecta directamente a la geometría de nuestro espacio-tiempo es la siguiente:

Corolario 4.5.2. *Sea ξ un vector de Killing del espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) , de forma que podemos definir los tensores Riem , Ric y el escalar de curvatura \mathcal{R} . Entonces:*

$$\mathcal{L}_\xi \text{Riem} = \mathcal{L}_\xi \text{Ric} = \mathcal{L}_\xi \mathcal{R} = 0$$

Demostración. Ya hemos visto en el anterior corolario que para cualquiera dos vectores X, Y tenemos que:

$$\mathcal{L}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Si aplicamos la identidad $\mathcal{L}_\xi X = \nabla_\xi X - \nabla_X \xi$ varias veces llegamos a:

$$\mathcal{L}_\xi(\text{Riem}(X, Y)Z) = \text{Riem}(\mathcal{L}_\xi X, Y)Z + \text{Riem}(X, \mathcal{L}_\xi Y)Z + \text{Riem}(X, Y)\mathcal{L}_\xi Z$$

Por lo que tenemos que necesariamente $\mathcal{L}_\xi \text{Riem} = 0$. Por consiguiente, como el tensor de Ricci, Ric , se obtiene por contracción del tensor con el inverso de la métrica g^{-1} , la derivada de Lie conmuta con contracciones siguiendo la regla de Leibniz y $\mathcal{L}_\xi g^{-1} = 0$ por definición de vector de Killing, tenemos que $\mathcal{L}_\xi \text{Ric} = 0$. Análogamente, puede verse que efectivamente $\mathcal{L}_\xi \mathcal{R} = 0$. \square

5. Agujeros negros y superficies atrapadas

La teoría de la Relatividad General se resume en las *ecuaciones de Einstein*. Como vimos en el capítulo 3, se trata de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden cuyas soluciones permiten describir la relación existente entre la geometría y la distribución de masa-energía presente en la región de estudio. Obtener soluciones de estas ecuaciones es una tarea complicada y que, a la práctica, conlleva un gran trabajo de cálculo numérico.

En este capítulo, consideraremos soluciones del espacio-tiempo 4-dimensional que se pueden obtener de forma exacta y veremos que aparecerán *singularidades*. Una de las principales consecuencias de la singularidad es que existan geodésicas que acaben en un tiempo finito, lo que se conoce como *espacio-tiempo geodésicamente incompleto*. Estas singularidades podrán estar asociadas a las coordenadas o ser una singularidad “real” del espacio-tiempo. Por lo tanto, para poder recoger todas las posibles fenomenologías, debemos establecer una definición precisa de singularidad.

Además, veremos que la presencia de una singularidad en el espacio-tiempo nos lleva a estudiar la noción de **agujero negro**. Un agujero negro es una región del espacio-tiempo en la que se experimenta una aceleración gravitacional tan fuerte tal que ninguna partícula ni radiación electromagnética puede escapar de ella. Los *agujeros negros* en el espacio-tiempo se pueden dividir en dos regiones: la región interior y la región exterior. Ambas regiones están divididas por una frontera que se conoce como **horizonte de sucesos**. Así pues, el hecho característico de un agujero negro es la presencia de un horizonte de sucesos. El horizonte de sucesos es un límite en el espacio-tiempo que la materia y la luz solo pueden atravesar, dirigiéndose al agujero negro, donde nada, ni siquiera la luz, puede escapar. Sin embargo, aunque el horizonte de sucesos tiene gran importancia en la existencia de un agujero negro, no parece observarse ninguna característica física localmente detectable. Por eso, uno de los objetivos de este capítulo será intentar exponer una definición alternativa de agujero negro, basada en la existencia de lo que llamaremos *superficies atrapadas* en el espacio-tiempo.

En el exterior del agujero negro las curvas nulas y temporales pueden ser extendidas al infinito, por lo que no se trata de una región geodésicamente incompleta y no habrá singularidad. Con el fin de poder estudiarlo, la idea será escoger unas coordenadas adecuadas de forma que sea posible multiplicar la métrica por un factor (“*conforme*”) que nos permita traer el infinito a puntos de coordenadas finitas. Estos puntos definirán una *frontera* en el espacio-tiempo, que llamaremos **infinito conforme**, \mathcal{I} . Así, la región exterior puede ser definida como el *pasado cronológico* del infinito futuro, \mathcal{I}^+ , es decir, el conjunto de puntos desde los que se puede alcanzar el infinito futuro a través de una curva temporal. Así, diremos que hay un **agujero negro** si todo el espacio-tiempo no está incluido en este conjunto. Además, podremos definir el horizonte de sucesos como la frontera del agujero negro con la región exterior. Con esta definición de agujero negro, será crucial tener una definición apropiada de “infinito”, que desarrollaremos

en este capítulo.

5.1 Compactificación conforme: diagrama de Penrose

En la “definición” que acabamos de ver de agujero negro hemos visto la necesidad de una caracterización apropiada de lo que llamaremos *infinito*. Tal y como hemos adelantado en la introducción, la idea es traer los puntos del infinito a puntos con coordenadas finitas, de forma que obtengamos un espacio-tiempo compacto con frontera. Por lo tanto, esta definición estará limitada y solo podrá ser aplicada sobre aquellos espacio-tiempos en los que sea posible añadir una *frontera*.

Para poder afrontar este problema del *infinito*, presentaremos una herramienta muy útil para discutir diferentes aspectos de los agujeros negros: el **diagrama de Carter-Penrose**. Estos diagramas están basados en las *transformaciones conformes* entre variedades lorentzianas. Recordemos que una **transformación conforme** entre variedades lorentzianas es una aplicación que preserva los ángulos. Este tipo de aplicaciones conservan la estructura causal del espacio-tiempo y nos permitirán traer todo el espacio-tiempo a una región finita y acotada. De esta forma, podremos estudiar propiedades físicas del espacio-tiempo, como son la estructura de los horizontes, las líneas de universo de diferentes observadores, etc.

Las *transformaciones conformes* nos permitirán obtener una *variedad conforme* con la que poder estudiar el espacio-tiempo, pues podremos “acercar.^{el} infinito y así conocer el comportamiento de las curvas causales en el infinito. Veamos la definición formal de esta nueva herramienta:

Definición 5.1.1. Diremos que una **variedad conforme**, M , es una variedad (semi-)riemanniana equipada con una clase de equivalencia de tensores métricos. La clase de equivalencia es tal que diremos que dos métricas, $g, h \in \Omega^2(M)$ son equivalentes si y sólo si $h = f^2g$ donde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida sobre la variedad.

El infinito juega un papel muy importante en el estudio del espacio-tiempo. La noción de infinito permite caracterizar el concepto de *sistema dinámico aislado*. Veamos qué implicaciones tiene en dicho concepto. La idea principal de la Relatividad General es que el espacio-tiempo experimenta una curvatura debido a la presencia de una distribución de masa-energía. Sin embargo, si estudiamos el espacio-tiempo en una región muy alejada de dicha distribución, la métrica debería aproximarse a la de un espacio-tiempo plano y vacío, es decir, a la métrica de Minkowski. Matemáticamente, la definición que recoge este concepto físico es la idea de espacio-tiempo *asintóticamente plano*. De esta forma, el infinito correspondería a los puntos del espacio-tiempo en los que la métrica se considera indistinguible de la métrica de Minkowski. Nos gustaría ser capaces de estudiar la estructura y la causalidad de esta frontera asintótica del espacio-tiempo que describe la geometría de un sistema aislado.

Para ello, de la misma manera que las *transformaciones conformes* en el plano complejo cambian las distancias pero conservan los ángulos, queremos modificar la métrica para conseguir

acortar distancias sin cambiar la causalidad del espacio-tiempo. Así, los campos espaciales, temporales y nulos han de ser mapeados a campos del mismo tipo. Con estas condiciones, la causalidad de las curvas se conserva, pero no necesariamente las geodésicas. Esta nueva herramienta con la que trabajaremos es lo que se conoce como **diagrama de Penrose-Carter**. Este diagrama sacrifica la información sobre las distancias entre puntos, permitiendo que la métrica de los diagramas de Penrose-Carter sea conformemente equivalente con una restricción bidimensional de la métrica real del espacio-tiempo que representan. El factor conforme ha de ser elegido de modo que todo el espacio-tiempo se proyecte en un diagrama de dimensiones finitas. La frontera de la nueva figura no formará parte del espaciotiempo original, pero permitirá estudiar sus propiedades asintóticas y sus singularidades.

Un diagrama de Penrose-Carter comparte varias características con el espacio-tiempo de Minkowski: las líneas oblicuas a 45° corresponden a trayectorias luminosas, la dimensión vertical representa una coordenada temporal y la horizontal a las dimensiones espaciales. Con el objetivo de aprender cómo realizar dichas transformaciones, estudiaremos un ejemplo relevante: el **diagrama de Penrose** para estudiar la estructura causal asintótica del espacio-tiempo de Minkowski.

Ejemplo 5.1.2. (*Estructura causal asintótica del espacio-tiempo de Minkowski*). El objetivo del *diagrama de Penrose* es conseguir un diagrama acotado cuyas fronteras representen el infinito y que respete la estructura causal. Si consideramos las coordenadas nulas (u, v, θ, ϕ) que vimos en el capítulo 3, tenemos que claramente las coordenadas u, v se van a infinito a lo largo de las subvariedades $\mathcal{C}_\tau, \bar{\mathcal{C}}_\tau$. Con el fin de traer el punto final de las geodésicas nulas a una distancia finita, podemos considerar las siguientes coordenadas:

$$\tan(p) = v$$

$$\tan(q) = u$$

de forma que $p, q \in (-\pi/2, \pi/2)$ y $p \geq q$. Por lo tanto, teniendo en cuenta que

$$v = \tan(p) \implies dv = \frac{1}{\cos^2(p)} dp$$

$$u = \tan(q) \implies du = \frac{1}{\cos^2(q)} dq$$

y la relación trigonométrica $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}(\tan(\alpha) - \tan(\beta))$ podemos expresar la métrica como:

$$\eta = \frac{1}{\cos^2(p)\cos^2(q)}(-dpdq + \frac{1}{4}\sin^2(p - q) \cdot g_S(\theta, \phi))$$

Como era de esperar, debido a la frontera de p, q , el factor $\frac{1}{\cos^2(p)\cos^2(q)}$ “estalla”^a infinito cuando $p, q \rightarrow \pm\pi/2$, es decir, en los valores de frontera. Con el fin de poder superar esta degeneración, podemos considerar la *métrica conforme* a η cuya expresión es

$$\tilde{\eta} = -dpdq + \frac{1}{4}\sin^2(p - q) \cdot g_S(\theta, \phi)$$

que claramente es conforme a η . Además, con esta nueva métrica los conjuntos

$$\tilde{\mathcal{C}}_\tau = \{(p, q, \theta, \phi) \mid q = \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$$

$$\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}_\tau = \{(p, q, \theta, \phi) \mid p = \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$$

siguen siendo hipersuperficies nulas. Así, si suprimimos alguna dirección angular, podemos representar la variedad $(\tilde{\mathbb{R}}^4, \tilde{\eta})$ con las coordenadas (p, q, θ, ϕ) : Es posible ahora caracterizar la

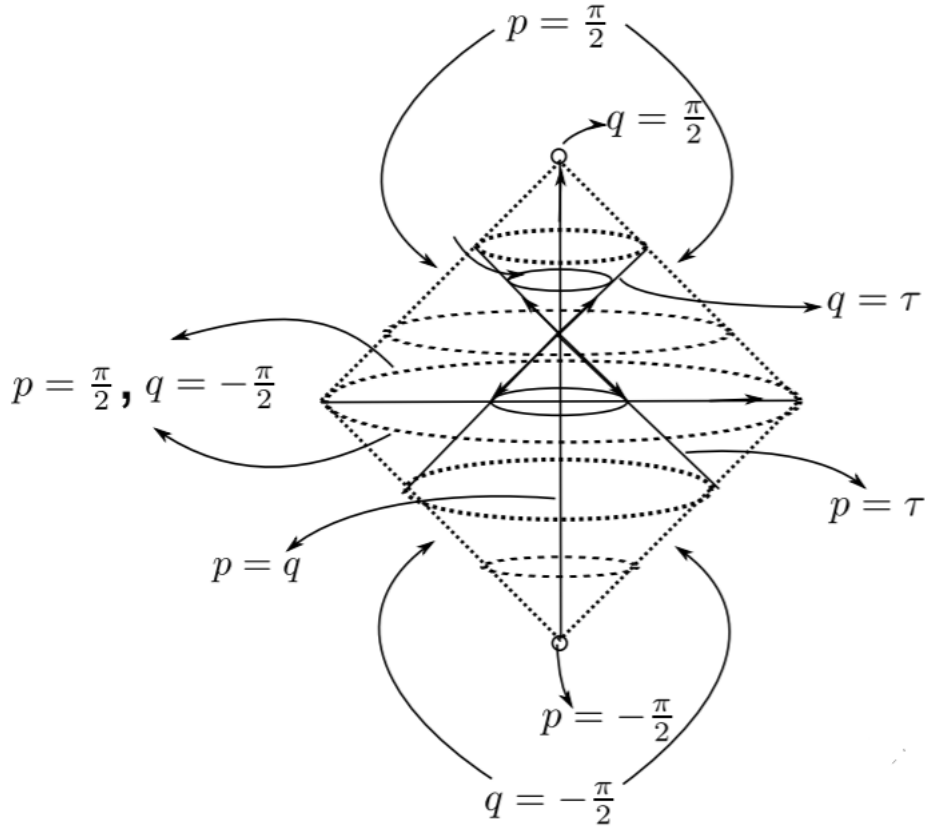


Figura 15: Variedad finita conforme al espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} [Fuente: [10]]

causalidad en el diagrama definiendo:

- El **infinito nulo orientado hacia el futuro**, \mathcal{I}^+ , (*resp. pasado*, \mathcal{I}^-) como los puntos finales de todas las geodésicas nulas orientadas hacia el futuro (*resp. pasado*) a lo largo de $r \rightarrow \infty$.
- El **infinito temporal orientado hacia el futuro**, i^+ , (*resp. pasado*, i^-) como los puntos finales de todas las geodésicas temporales orientadas hacia el futuro (*resp. pasado*).
- El **infinito espacial**, i^0 , como el punto final de todas las geodésicas espaciales. Este infinito, de hecho, es un punto y no una esfera como en los casos anteriores (pues estamos reduciendo la dimensión del diagrama considerando simetría esférica). Puede considerarse como el punto generado por la compactificación de la hipersuperficie $t = 0$.

Con estas definiciones, podemos estudiar la causalidad del espacio-tiempo de Minkowski gracias a la compactificación, que podemos agrupar en la siguiente imagen: Si estudiamos un obser-

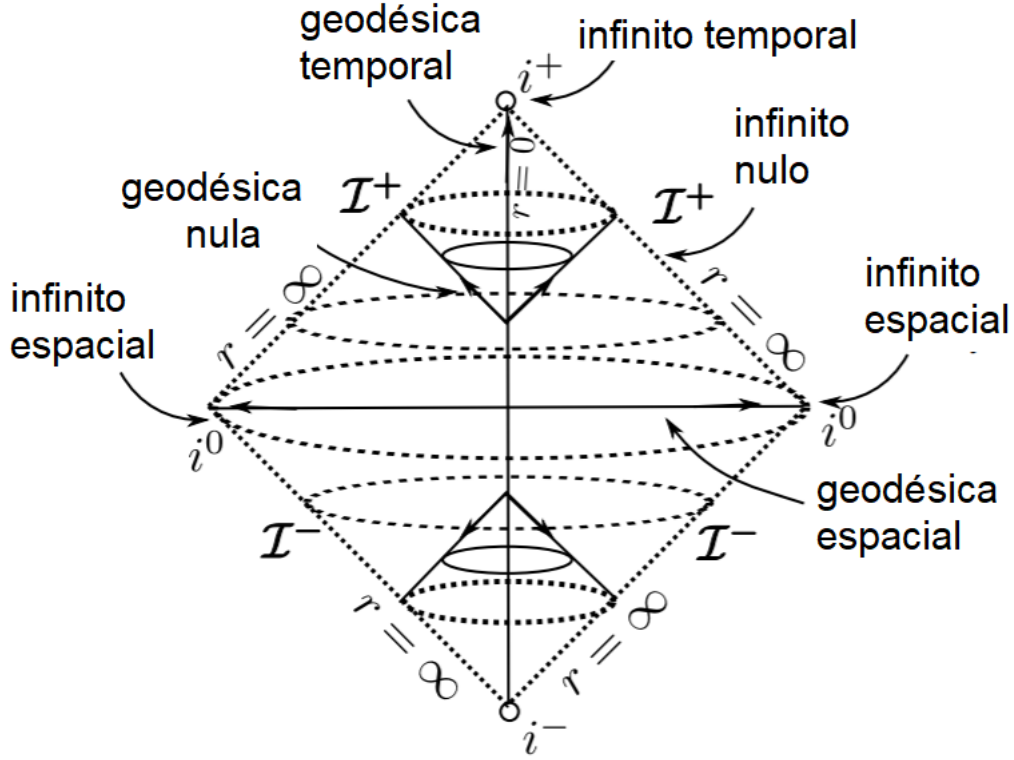


Figura 16: Identificación de la frontera del diagrama de Penrose

vador que se mueve en el espacio-tiempo a través del diagrama de Penrose, podemos ver que cuando $t \rightarrow \pm\infty$ para r finito el observador se dirige a i^\pm mientras que cuando $r \rightarrow \infty$ para t finito va hacia i^0 . Sin embargo, cuando $t r \rightarrow \pm\infty$ el observador alcanza el infinito nulo \mathcal{I}^\pm .

Si en lugar de suprimir una sola dirección angular, suprimimos todas las direcciones angulares podemos simplificar aun más el diagrama de Penrose. Formalmente, lo que hacemos es considerar el cociente $\tilde{\mathbb{R}}^{3+1}/SO(3)$. De esta forma, la métrica simplemente sería $g = \tilde{\eta}_{cociente} = -dpdq$, que coincide con la métrica de Minkowski de \mathbb{R}^{1+1} . En este caso, obtenemos un diagrama plano en el que los conos colapsan en rectas como podemos ver en la siguiente imagen: Así, gracias a este diagrama hemos visto que el pasado del futuro nulo, \mathcal{I}^+ , es todo el espacio-tiempo completo. Esto quiere decir que cualquier punto puede enviar señales y está comunicado con \mathcal{I}^+ . Sin embargo, esto no tiene por qué ser siempre así, pueden existir puntos del espacio tiempo que no estén comunicados con el infinito nulo. En este caso decimos que existe un *agujero negro*.

Por tanto, de forma general, es posible definir el diagrama de Penrose de un espacio-tiempo esféricamente simétrico como la imagen de una transformación conforme acotada del espacio-tiempo cociente por el grupo ortogonal, $SO(4)$, en el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{R}^{1+1} . La idea se puede generalizar para cualquier métrica con simetría esférica donde la métrica viene

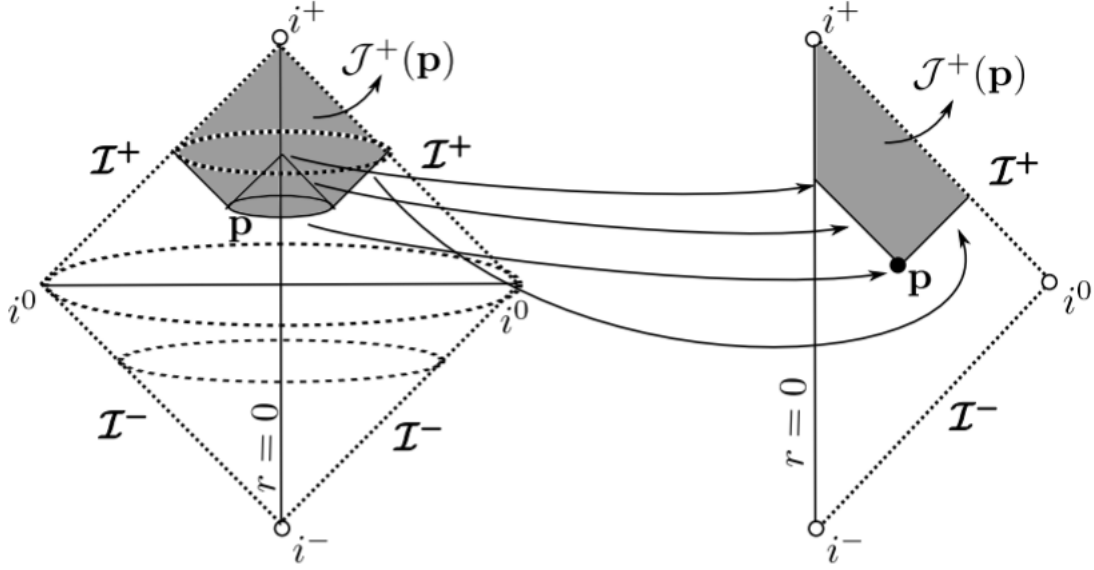


Figura 17: Diagrama de Penrose y estructura causal para $g = -dp - dq$ [Fuente: [10]]

dada por:

$$d\Omega^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad r = r(x^0, x^1)$$

donde $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ es una métrica Lorentziana definida sobre la variedad cociente de dimensión 2 con frontera. Entonces, esta métrica es conformal a la métrica de Minkowski:

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -\Omega^2 du dv, \quad \Omega = \Omega(u, v)$$

Así, cualquier métrica con simetría esférica puede expresarse como

$$d\Omega^2 = -\Omega^2 du dv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad \Omega = \Omega(u, v), \quad r = r(u, v)$$

siendo posible representar el diagrama de Penrose-Carter asociado a dicha métrica.

Para acabar la sección, veamos el procedimiento general que hemos seguido para encontrar el diagrama de Penrose. Sea (\mathbb{M}, g) una variedad riemanniana solución de las ecuaciones de Einstein cuya causalidad global estamos interesados en conocer. Los pasos para realizar la *compactificación conforme* son los siguientes:

1. Realizar un cambio de coordenadas que traiga el infinito a una distancia finita de forma que obtengamos una región compacta de nuestra variedad. Con este cambio de coordenadas, la métrica debe tener la siguiente forma:

$$g(x^\mu) \implies g(y^\mu) = f(y^\mu)g_*(y^\mu)$$

donde $f(y^\mu)$ es una función positiva de las nuevas coordenadas y $g_*(y^\mu)$ es una métrica que podríamos asociar a otro espacio-tiempo (\mathbb{M}_*, g_*) , cuya métrica no tiene por qué cubrir todo el espacio-tiempo \mathbb{M}_* .

2. Efectuar una transformación conforme de forma que obtengamos $g_*(y^\mu) = [f(y^\mu)]^{-1}g(y^\mu)$ y nos permita obtener un rango acotado de las coordenadas para \mathbb{M}_* . Recordemos que \mathbb{M}_* no tiene por qué ser un espacio-tiempo físico, simplemente es un objeto matemático fácil de analizar que presentará la misma estructura causal que el universo físico (\mathbb{M}, g) .
3. En lo que nos concierne, trabajaremos con espacio-tiempos máximamente simétricos, por lo que podremos omitir las coordenadas (θ, ϕ) . De esta forma, obtenemos una subvariedad bidimensional acotada de \mathbb{M}_* que extenderemos sobre un plano. Esta representación es la que hemos llamado *diagrama de Penrose-Carter* del espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) .

A continuación, estudiaremos otros espacio-tiempos esféricamente simétricos cuya métrica es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein sin la constante cosmológica.

5.2 Métricas esféricamente simétricas. La métrica de Schwarzschild

Tal y como comentamos en la introducción, existen muy pocas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. Una de las más conocidas es la solución obtenida por Schwarzschild, la cual representa un espacio-tiempo estático con simetría esférica. Podríamos preguntarnos cuántas posibles soluciones esféricamente simétricas son solución de la ecuación de Einstein en el vacío. La respuesta a esta pregunta nos la da el **teorema de Birkhoff**. Este teorema nos dice que la solución de *Schwarzschild* es la única solución esféricamente simétrica que verifica las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Antes de continuar con el estudio de este tipo de soluciones, definamos de forma precisa el concepto de solución *esféricamente simétrica*:

Definición 5.2.1. Diremos que el espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) es **esféricamente simétrico** si el grupo $SO(3)$ actúa como isometría y las órbitas de este grupo son esferas 2-dimensionales.

Además de esta simetría espacial, también podemos considerar en dicho espacio-tiempo otro tipo de simetrías. Por ejemplo, si consideramos simetrías respecto la causalidad del espacio-tiempo (como vimos en el capítulo 3), tenemos las siguientes definiciones:

Definición 5.2.2. Diremos que un espacio-tiempo (\mathbb{M}, g) es **estacionario** si admite un *campo de Killing* temporal. Si además existe una hipersuperficie temporal tal que es ortogonal al vector de Killing, diremos que el espacio-tiempo es **estático**.

De esta forma, si consideramos un espacio-tiempo estático y simétrico, como $SO(3)$ actúa por isometría, tenemos que existirán cuatro vectores de Killing linealmente independientes: $T, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$. El campo de Killing asociado al tiempo será $T \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, mientras que $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ corresponden a las simetrías espaciales y verifican las siguientes relaciones de conmutación:

$$[X, Y] = Z$$

$$[Y, Z] = X$$

$$[Z, X] = Y$$

Así, el *teorema de Frobenius* implica que las curvas integrales de estos campos vectoriales están restringidas a la subvariedad. En este caso, las subvariedades asociadas a los campos X, Y, Z son dos esferas que permitirían definir una foliación de (*casi*) todo el espacio-tiempo en dos esferas centradas en el origen. Esta foliación basada en simetrías de la variedad permite definir un sistema de coordenadas: u^i que permite moverse dentro de una de las subvariedades y v^I para moverse entre las subvariedades. Se puede demostrar (*aunque no lo haremos*) que si las subvariedades son totalmente simétricas, la métrica del espacio-tiempo se puede escribir como

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{IJ}(v) dv^I dv^J + f(v) \gamma_{ij}(u) du^i du^j$$

Así, podemos ver que la métrica sobre las subvariedades es la misma en diferentes subvariedades pues $g_{IJ}(v), f(v)$ no dependen de u y los términos cruzados pueden eliminarse. Para una variedad simétricamente esférica tenemos:

$$d\Omega^2 = g_{aa} da^2 + g_{ab}(a, b)(dadv + dbda) + g_{bb}(a, b) db^2 + r^2(a, b) dg_S(\theta, \phi)$$

donde $dg_S(\theta, \phi) = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$.

Nuestro objetivo ahora es cambiar las coordenadas (a, b) por (t, r) para así encontrar los coeficientes de la métrica de Schwarzschild. Para ello, empezaremos cambiando las coordenadas (a, b) por (a, r) gracias a invertir $r(a, b)$:

$$d\Omega^2 = g_{aa}(a, r) da^2 + g_{ar}(a, r)(dadr + drda) + g_{rr}(a, r) dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

Ahora, queremos cambiar las coordenadas (a, r) a (t, r) de forma que la métrica no tenga términos cruzados $dt dr + dr dt$. Es decir, queremos que la coordenada t sea tal que la métrica tenga la expresión:

$$d\Omega^2 = m(t, r) dt^2 + n(t, r) dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

Por lo tanto, si la coordenada deseada es $t(a, r)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\partial t}{\partial a} da + \frac{\partial t}{\partial r} dr \implies \\ \implies dt^2 &= \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 da^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)(dt dr + dr dt) + \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 dr^2 \end{aligned}$$

Si sustituimos en la expresión de la métrica “deseada”, tenemos:

$$d\Omega^2 = m(t, r)\left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 da^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)(dt dr + dr dt) + \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 dr^2 + n(t, r) dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

que relacionando con los coeficientes de la métrica en coordenadas (a, r) podemos obtener las siguientes ecuaciones para las funciones $t(a, r), n(a, r), m(a, r)$:

$$\begin{aligned} m(a, r)\left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 &= g_{aa} \\ n(a, r) + m(a, r)\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 &= g_{rr} \end{aligned}$$

$$m(a, r) \left(\frac{\partial t}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right) = g_{ar}$$

Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales siempre tiene solución para las funciones $t(a, r), n(a, r), m(a, r)$. Por lo tanto, siempre será posible escribir la métrica de un espacio-tiempo esféricamente simétrico de la forma que hemos visto con las coordenadas (t, r) . Sin embargo, debido a la signatura de la métrica lorentziana, una de las funciones $n(t, r)$ o $m(t, r)$ debe ser negativa. Podemos escoger el coeficiente de dt^2 como negativo sin pérdida de generalidad. Si reescribimos la métrica en términos de exponenciales podemos obtener la siguiente expresión:

$$d\Omega^2 = -e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

Así pues, lo último que faltaría es determinar las funciones α, β que permiten que dicha métrica sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Por lo tanto, necesitamos encontrar el tensor de Ricci de la métrica. Para ello, usaremos las expresiones que estudiamos en el *Capítulo 1* que nos permiten calcular el tensor de Ricci en coordenadas. Primeramente, necesitaremos calcular los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica $d\Omega^2$. Teniendo en cuenta la expresión de $d\Omega^2$, es fácil encontrar que los únicos símbolos de Christoffel no nulos serán:

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} g^{tm} \left(\frac{\partial g_{mt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{mt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^m} \right)$$

como el único valor no nulo de la inversa del tensor métrico, g^{ij} , de la forma g^{tm} es g^{tt} , tenemos que:

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} (-e^{-2\alpha}) (-e^{2\alpha}) 2 \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Usando el mismo razonamiento y usando la simetría de los símbolos tenemos que el resto de símbolos de Christoffel no nulos vienen dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} (-e^{-2\alpha}) (-e^{2\alpha}) 2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \\ \Gamma_{rr}^t &= \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} (-e^{2\alpha}) (-e^{2\beta}) 2 \frac{\partial \beta}{\partial t} = e^{2(\beta-\alpha)} \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} e^{-2\beta} e^{2\beta} 2 \frac{\partial \beta}{\partial r} = \frac{\partial \beta}{\partial r} \\ \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} e^{-2\beta} e^{2\beta} 2 \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} e^{-2\beta} e^{2\alpha} 2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} = e^{2(\alpha-\beta)} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} e^{-2\beta} (-2r) = -r e^{-2\beta} \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} r^{-2} 2r = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(\frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} e^{-2\beta} (-2r) \sin^2(\theta) = -r e^{-2\beta} \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial\phi} + \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{2}r^{-2}(-r^2)2\sin(\theta)\cos(\theta) = -\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\left(\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial\phi}\right) = \frac{1}{2}r^{-2}\sin^{-2}(\theta)r^22\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Usando estos símbolos de Christoffel, podemos calcular las componentes del tensor de Riemann. Si queremos que nuestra métrica sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, entonces ha de cumplir $Ric_{ab} = 0$. Por lo tanto, si imponemos esto al tensor de Ricci obtenido:

$$R_{tr} = R_{rt} = \frac{\partial\beta}{\partial t} = 0 \implies \beta = \beta(r)$$

Además, si $Ric_{\theta\theta} = 0 \implies \frac{\partial Ric_{\theta\theta}}{\partial t} \implies \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right) = 0$. Por lo tanto, la función $\alpha(t, r)$ se puede expresar como:

$$\alpha(t, r) = f(r) + g(t) \implies e^{2\alpha(t, r)} = e^{2f(r)}e^{2g(t)}$$

y si redefinimos el valor de t , de forma que $dt \rightarrow e^{-g(t)}dt$, obtenemos que la métrica se puede expresar como

$$d\Omega^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2g_S(\theta, \phi)$$

donde podemos ver que efectivamente la métrica es independiente del tiempo, por lo que existirá un vector de Killing de tipo tiempo. Esto es acorde con el hecho de que el espacio-tiempo sea estacionario.

Si queremos encontrar los valores de las funciones $\alpha(r), \beta(r)$, simplemente hemos de seguir imponiendo $Ric_{ab} = 0$. En efecto, si tenemos en cuenta que $R_{tt} = 0$ y $R_{rr} = 0$, podemos desarrollar la siguiente expresión:

$$Ric_{tt} = 0, Ric_{rr} = 0 \implies e^{2(\alpha-\beta)}Ric_{tt} + Ric_{11} = 0 \implies \frac{2}{r}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\partial\beta}{\partial r}\right) \implies \alpha(r) = -\beta(r) + k, k \in \mathbb{R}$$

y redefiniendo las coordenada r de forma que dr absorba este término, la métrica se puede expresar:

$$d\Omega^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{-2\alpha(r)}dr^2 + r^2g_S(\theta, \phi)$$

Para intentar encontrar el valor de $\alpha(r)$, tenemos en cuenta de nuevo que $Ric_{\theta\theta} = 0$ (que ahora habrá cambiado de expresión) y por lo tanto obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$1 - e^{2\alpha(r)} - 2e^{2\alpha(r)}r\alpha'(r) = 0 \implies e^{2\alpha(r)}(2r\alpha'(r) + 1) = 1 \implies \frac{d}{dr}(re^{2\alpha(r)}) = 1 \implies re^{2\alpha(r)} = r + \mu \implies e^{2\alpha(r)} = 1 + \frac{\mu}{r}$$

Sustituyendo en la métrica, tenemos que la expresión final es:

$$d\Omega^2 = -(1 + \frac{\mu}{r})dt^2 + (1 + \frac{\mu}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$$

que representa el caso más general de un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estacionario.

La métrica de Schwarzschild

Hemos visto que la **métrica de Schwarzschild** es la única solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Para hallar esta solución, hemos visto que la solución general para una métrica esféricamente simétrica viene dada por:

$$d\Omega^2 = -\left(1 + \frac{\mu}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$$

Podemos encontrar el valor de la constante arbitraria $\mu \in \mathbb{R}$ considerando el límite asintótico cuando $r \rightarrow \infty$, de forma que:

$$\begin{aligned} g_{tt}(r \rightarrow \infty) &\rightarrow -1 - \frac{\mu}{r} \\ g_{rr}(r \rightarrow \infty) &\rightarrow 1 - \frac{\mu}{r} \end{aligned}$$

que comparando con el límite newtoniano, tenemos

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1 - 2\Phi \\ g_{rr} &= 1 - 2\Phi \end{aligned}$$

donde $\Phi = -\frac{GM}{r}$ es el potencial gravitatorio, por lo que claramente podemos fijar $\mu = -2GM$ con M la masa medida a largas distancias. Así, obtenemos finalmente la **métrica de Schwarzschild**:

$$g = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

y podemos comprobar que efectivamente, dicha métrica cuando $r \rightarrow \infty$ se reduce a la **métrica de Minkowski**.

Una vez hemos obtenido de forma general el valor de la métrica de Schwarzschild como solución exacta de las ecuaciones de Einstein, podemos analizar las posibles *singularidades*. Aparentemente, las singularidades de la métrica serán $r = 0$ y $r = 2GM$. El valor $r = r_s = 2GM$ suele denominarse el **radio de Schwarzschild**. Este valor divide el espacio-tiempo de Schwarzschild aparentemente en dos regiones desconexas: el exterior ($r > r_s$) y el interior ($0 \leq r < r_s$) de la solución de Schwarzschild. La solución exterior representa el campo gravitacional de estrellas y planetas, cuerpos gravitacionales cuyo radio cumple $R > r_s$, mientras que la solución interior contiene la singularidad $r = 0$ y está aparentemente desconectada de la solución exterior. Sin embargo, usando otras coordenadas, como las de *Eddington-Finkelstein* o *Kruskal-Szekeres*, podemos ver que es posible conectar ambas regiones, obteniendo una métrica regular para $r = r_s$. Esto se debe a que, como ya adelantamos anteriormente, existen singularidades que están ligadas a las coordenadas utilizadas. Por ejemplo, si consideramos la métrica de Minkowski, tenemos una aparente singularidad para $r = 0$, que desaparece al utilizar las coordenadas cartesianas. Esto muestra que, efectivamente, no se trata de una singularidad física sino asociada a las coordenadas utilizadas. Por lo tanto, si queremos obtener las singularidades que son independientes de las coordenadas podemos estudiar si existen singularidades para el escalar de curvatura o alguna magnitud escalar obtenida a partir del tensor de Riemann. Para el caso de la métrica de Schwarzschild, si calculamos:

$$Riem^{abcd}Riem_{abcd} = \frac{12G^2M^2}{r^6}$$

podemos ver que $r = 0$ es una singularidad propia de la geometría, mientras que podemos decir que $r = 2GM$ es una singularidad asociada a las coordenadas utilizadas. En el punto $r = 0$ la curvatura se hace infinita de forma que la métrica (y, por tanto, el espacio-tiempo) dejan de estar bien definidos. Así, la solución que obtenemos para $r > 0$ es lo que se conoce como **agujero negro de Schwarzschild**. Este espacio-tiempo tiene propiedades curiosas, como veremos a continuación. Si estudiamos el comportamiento de los conos de luz para ángulos constantes, es decir:

$$g = 0 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 \implies$$

$$\implies \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} \implies \frac{dt}{dr} = \pm\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

podemos ver que si $r \rightarrow 2GM$, entonces $\frac{dt}{dr} \rightarrow \infty$. Esto quiere decir que con estas coordenadas alcanzar el horizonte de sucesos $r = 2GM$ lleva una coordenada de tiempo t infinito. Esto no quiere decir que el *tiempo propio* para alcanzar la hipersuperficie sea infinito, lo que ocurre es que la coordenada de tiempo t va muy rápido al acercarse a $r = 2GM$. Para intentar solucionar este problema podemos usar las **coordenadas de Tortoise**:

$$r^* = r + 2GM \log\left|\frac{r}{2GM} - 1\right|$$

de forma que $\frac{dt}{dr} = \pm\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$ tenga la solución $t = \pm r^* + \text{constante}$. Entonces, para calcular la métrica en estas coordenadas tenemos:

$$dr^* = \frac{\partial r^*}{\partial r} dr = 1 + 2GM \frac{1}{\frac{r}{2GM} - 1} \frac{1}{2GM} dr = 1 + \frac{2GM}{r - 2GM} dr = \frac{r - 2GM + 2GM}{r - 2GM} dr = \frac{r}{r - 2GM} dr$$

$$\implies dr = \frac{r - 2GM}{r} dr^* = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dr^* \implies dr^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 (dr^*)^2$$

donde la coordenada r se puede expresar en función de r^* teniendo en cuenta la definición de la coordenada de Tortoise. Podemos expresar la métrica de Schwarzschild como:

$$g = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

de forma que la hipersuperficie $r = 2GM$ ha sido enviada a $r^* = -\infty$. Como ahora nuestro objetivo es estudiar la región $r < 2GM$, donde se encuentra la singularidad, estas coordenadas no son suficientes, por lo que necesitamos aplicar más cambios de coordenadas.

Coordenadas *ingoing* de Eddington-Finkelstein

Para estudiar la región de la singularidad, podemos cambiar la coordenada t por la coordenada nula

$$v = t + r^* \implies dv = dt + dr^* = dt + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \implies$$

$$\implies dt = dv - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \implies dt^2 = dv^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} dr^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} (dvdr + drdv)$$

Por lo tanto, sustituyendo en la métrica tenemos que, usando las coordenadas (v, r, θ, ϕ) , la métrica tiene la expresión:

$$\begin{aligned} g &= -(1 - \frac{2GM}{r})(dv^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-2}dr^2 - (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}(dvdr + drdv)) + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi) = \\ &= -(1 - \frac{2GM}{r})dv^2 - (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + (dvdr + drdv) + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi) \implies \\ &\implies g = -(1 - \frac{2GM}{r})dv^2 + (dvdr + drdv) + r^2 g_S(\theta, \phi) \end{aligned}$$

donde podemos ver que la métrica es completamente regular para $r = 2GM$ aunque permanece la singularidad en $r = 0$. Estas coordenadas se conocen como las **coordenadas “in-going” de Eddington-Finkelstein** pues las curvas $v = \text{const.}$ representan las trayectorias radiales geodésicas nulas *ingoing*, mientras que las curvas $u = \text{const.}$ son trayectorias radiales geodésicas nulas *outgoing*.

Con estas coordenadas podemos observar cómo al pasar por el radio de Schwarzschild el espacio y el tiempo se invierten: las coordenadas radiales r se convierten en coordenadas temporales, mientras que la coordenada temporal t se convierte en espacial. Esto implica que una curva con $r = \text{cte}$ dentro de la región $r < 2GM$ ya no es una posible *línea de universo*, pues esta coordenada avanza irremediamente en una única dirección: la singularidad. Efectivamente, las trayectorias nulas *outgoing* que empiezan en $r > 2GM$ finalmente escapan a infinito, mientras que las que empezaron en $r < 2GM$ permanecen en esa región y se dirigen irremediamente hacia la singularidad $r = 0$. Por otro lado, las trayectorias nulas *outgoing* emitidas en $r = 2GM$ permanecen en $r = 2GM$ para siempre. Por esto, llamamos a $r = 2GM$ el horizonte de sucesos y la región $r < 2GM$ el **agujero negro**, pues todo lo que se encuentra en dicha región jamás puede escapar de ella.

Coordenadas *outgoing* de Eddington-Finkelstein

Antes hemos considerado el cambio $t \rightarrow v = t + r^*$. Otra posibilidad es considerar la coordenada $u = t - r^* \implies du = dt - dr^* = dt - (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr$. Entonces, si queremos considerar las coordenadas (u, r, θ, ϕ) , conocidas como las **coordenadas “outgoing” de Eddington-Finkelstein**, podemos expresar dt^2 como:

$$dt = du + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr \implies dt^2 = du^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-2}dr^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}(dudr + drdu)$$

Con estas coordenadas, la métrica viene dada por:

$$\begin{aligned} g &= -(1 - \frac{2GM}{r})(du^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-2}dr^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}(dudr + drdu)) + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi) = \\ &= -(1 - \frac{2GM}{r})du^2 - (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 - (dudr + drdu) + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi) \implies \\ &\implies g = -(1 - \frac{2GM}{r})du^2 - (dudr + drdu) + r^2 g_S(\theta, \phi) \end{aligned}$$

En este caso, las trayectorias nulas *ingoing* emitidas en las regiones $r < 2GM$ o $r > 2GM$ nunca cruzar la hipersuperficie $r = 2GM$, pues si la alcanzan permanecen en ella para siempre. Por el contrario, las geodésicas nulas *outgoing* escapan siempre al infinito. Toda trayectoria nula que se encuentre en $r < 2GM$ será expulsada por lo que dicha región se conoce como **agujero blanco** y $r = 2GM$ es el *horizonte del agujero blanco*. Esta situación es exactamente la inversión temporal de la situación anterior.

Por tanto, hemos visto que el comportamiento del espacio-tiempo descrito por las coordenadas de Eddington-Finkelstein son muy diferentes. Esto puede parecer contradictorio tratándose ambos casos de transformaciones del espacio-tiempo de Schwarzschild. Para comprender mejor esta aparente incongruencia, estudiaremos las siguientes coordenadas.

Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Con el objetivo de solucionar la aparente contradicción al estudiar las coordenadas anteriores, presentaremos las **coordenadas de Kruskal-Szekeres**, que presentan la ventaja de recoger todo el espacio-tiempo de la solución maximal de Schwarzschild y está bien definida en todo punto fuera de la singularidad $r = 0$. Para obtener estas coordenadas, comenzaremos por sustituir las coordenadas (t, r) por $(u, v) = (t - r^*, t + r^*)$. Para ello, tenemos en cuenta que podemos expresar las coordenadas (t, r) en función de las nuevas coordenadas (u, v) como:

$$t = \frac{1}{2}(u + v) \implies dt = \frac{1}{2}(du + dv) \implies dt^2 = \frac{1}{4}(du^2 + dv^2 + dudv + dvdu)$$

$$r^* = \frac{1}{2}(u - v) \implies dr^* = \frac{1}{2}(du - dv) \implies (dr^*)^2 = \frac{1}{4}(du^2 + dv^2 - dudv - dvdu) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} dr^2$$

Sustituyendo estos valores en la métrica de Schwarzschild tenemos que:

$$\begin{aligned} g &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{1}{4}(du^2 + dv^2 + dudv + dvdu) + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 \frac{1}{4}(du^2 + dv^2 - dudv - dvdu) + \\ &\quad + r^2 g_S(\theta, \phi) = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{1}{2}(dudv + dvdu) + r^2 g_S(\theta, \phi) \implies \\ &\implies g = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(dudv + dvdu) + r^2 g_S(\theta, \phi) \end{aligned}$$

donde la coordenada $r = r(u, v)$ se puede expresar en función de (u, v) teniendo en cuenta que $r = r^* - 2GM \log\left|\frac{r}{2GM} - 1\right|$ y que $r^* = \frac{v-u}{2}$. Sin embargo, esta métrica sigue presentando la singularidad $r = 2GM$, por lo que podemos definir las coordenadas

$$U = -e^{\frac{-u}{4GM}} \implies dU = \frac{1}{4GM} e^{\frac{-u}{4GM}} du$$

$$V = e^{\frac{v}{4GM}} \implies dV = \frac{1}{4GM} e^{\frac{v}{4GM}} dv$$

con las que podemos expresar el producto $dudv$ como

$$dudv = (4GM e^{\frac{u}{4GM}} dU)(4GM e^{\frac{-v}{4GM}} dV) = 16G^2 M^2 e^{\frac{u-v}{4GM}} dU dV = 16G^2 M^2 e^{-\frac{r^*}{2GM}} dU dV =$$

$$= 16G^2 M^2 e^{-\frac{r}{2GM}} e^{\log|\frac{r}{2GM}-1|^{-1}} dU dV = 16G^2 M^2 (\frac{r}{2GM} - 1)^{-1} e^{\frac{r}{2GM}} dU dV$$

y, por tanto, la métrica se puede expresar como

$$\begin{aligned} g &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) 16G^2 M^2 \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{-1} e^{\frac{r}{2GM}} (dU dV + dV dU) + r^2 g_S(\theta, \phi) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{r - 2GM}{r} \frac{2GM}{r - 2GM} 16G^2 M^2 e^{\frac{r}{2GM}} (dU dV + dV dU) + r^2 g_S(\theta, \phi) \implies \\ &\implies g = -\frac{16G^3 M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (dV dU + dU dV) + r^2 g_S(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Así, con estas coordenadas la métrica no presenta singularidad para ninguna geodésica pasando a través de $r = 2GM$, que viene dado por la ecuación $UV = 0$, mientras que la singularidad $r = 0$ viene dada por $UV = 1$. Las geodésicas nulas *outgoing* e *ingoing* vienen dadas por $U = \text{const.}$ y $V = \text{const.}$, respectivamente.

Ahora, el siguiente paso es obtener una única coordenada temporal y otra única espacial, obteniendo lo que se conocen como las **coordenadas de Kruskal-Szekeres**:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(V - U) = \frac{1}{2}(e^{\frac{v}{4GM}} - e^{\frac{-u}{4GM}}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{t+r^*}{4GM}} - e^{\frac{-t+r^*}{4GM}}) = \\ &= \frac{1}{2}(e^{\frac{t}{4GM}} e^{\frac{r}{4GM}} e^{\log|\frac{r}{2GM}-1|^{1/2}} - e^{\frac{-t}{4GM}} e^{\frac{r}{4GM}} e^{\log|\frac{r}{2GM}-1|^{1/2}}) = (\frac{r}{2GM} - 1)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} (e^{\frac{t}{4GM}} - e^{\frac{-t}{4GM}}) \implies \\ &\implies T = (\frac{1}{2GM} - 1)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} \sinh(\frac{t}{4GM}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(V + U) = \frac{1}{2}(e^{\frac{v}{4GM}} + e^{\frac{-u}{4GM}}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{t+r^*}{4GM}} + e^{\frac{-t+r^*}{4GM}}) = \\ &= \frac{1}{2}(e^{\frac{t}{4GM}} e^{\frac{r}{4GM}} e^{\log|\frac{r}{2GM}-1|^{1/2}} + e^{\frac{-t}{4GM}} e^{\frac{r}{4GM}} e^{\log|\frac{r}{2GM}-1|^{1/2}}) = (\frac{r}{2GM} - 1)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} (e^{\frac{t}{4GM}} + e^{\frac{-t}{4GM}}) \implies \\ &\implies X = (\frac{1}{2GM} - 1)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} \cosh(\frac{t}{4GM}) \end{aligned}$$

para la región del espacio-tiempo cumpliendo $r > 2GM$, mientras que para la región $r < 2GM$, tenemos:

$$\begin{aligned} T &= (\frac{1}{2GM} - 1)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} \sinh(\frac{t}{4GM}) \\ X &= (\frac{1}{2GM} - 1)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} \cosh(\frac{t}{4GM}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que tanto para la región interior y exterior como para el horizonte de sucesos la coordenada radial de Schwarzschild r está unívocamente determinada por la ecuación:

$$T^2 - X^2 = (1 - \frac{r}{2GM}) e^{\frac{r}{2GM}}, \quad T^2 - X^2 < 1$$

cuya solución puede ser expresada gracias a la función **Lambert**, W :

$$r = 2GM(1 + W_0(\frac{X^2 - T^2}{e}))$$

Además, para la región exterior tenemos que

$$T^2 - X^2 < 0, t = 4GM \operatorname{arctanh}(T/X)$$

mientras que para el interior

$$0 < T^2 - X^2 < 1, t = 4GM \operatorname{arctanh}(X/T)$$

Para poder obtener la métrica en estas coordenadas, necesitamos obtener el producto de formas $dVdU$, $dUdV$ en función de las formas dT, dX :

$$dVdU = (dT + dX)(dT - dX) = dT^2 - dTdX + dTdX - dX^2$$

$$dUdV = (dT - dX)(dT + dX) = dT^2 + dTdX - dTdX - dX^2$$

entonces:

$$dVdU + dUdV = 2(dT^2 - dX^2)$$

y, por lo tanto, la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal-Szekeres queda:

$$g = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (-dT^2 + dX^2) + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

De esta forma, hemos obtenido unas coordenadas para las cuales las geodésicas nulas radiales vienen dadas por $T = \pm X$ para ángulos (θ, ϕ) constantes. Además, ahora el horizonte de sucesos $r = r_s = 2GM$ viene dado por $T^2 - X^2 = 0$, donde la métrica está perfectamente definida, mientras que la singularidad de la curvatura, $r = 0$, se encuentra en $T^2 - X^2 = 1$.

Al considerar esta solución maximal de Schwarzschild, no solo estamos teniendo en cuenta el rango $r > 2GM$ para $-\infty < t < +\infty$, sino que al ser r una función analítica de T y X para todos los valores excepto $r = 0$, podemos extender dicha solución al menos hasta $T^2 - X^2 = 1$ (donde tiene lugar la singularidad). Así pues, los valores permitidos para las nuevas coordenadas son:

$$-\infty < X < +\infty$$

$$-\infty < T < 1$$

De esta forma, podemos encontrar dos singularidades en $r = 0$, una para valores positivos de T y otra para valores negativos. La singularidad para T negativo es el inverso temporal del agujero negro, lo que anteriormente hemos denominado *agujero blanco*. Las partículas pueden escapar del agujero blanco pero nunca más pueden regresar a él. Por lo tanto, el espacio-tiempo de la solución de Schwarzschild realmente representa un agujero negro y un agujero blanco simétricos que están unidos por una estrecha garganta, que se denomina **agujero de gusano de Schwarzschild**. Hasta la fecha no se ha hallado ninguna evidencia de que el espacio-tiempo conocido contenga estructuras de este tipo, por lo que en la actualidad es solo una posibilidad

teórica en la ciencia.

De hecho, la geometría de la extensión máxima de Schwarzschild puede dividirse en 4 regiones, de forma que todas las regiones están cubiertas por las coordenadas de Kruskal-Szekeres:

- **Región I:** exterior al agujero negro, $r > 2GM \iff -X < T < +X$.
- **Región II:** interior del agujero negro, $0 < r < 2GM \iff |X| < T < \sqrt{1 + X^2}$.
- **Región III:** exterior al agujero blanco, paralela a la región I, $r > 2GM \iff +X < T < -X$.
- **Región IV:** interior del agujero blanco, $0 < r < 2GM \iff \sqrt{1 + X^2} < T < -|X|$.

Definiendo las diferentes regiones, podemos ver a relación de los diferentes sistemas de coordenadas de Schwarzschild. Las coordenadas originales (t, r, θ, ϕ) permiten estudiar la región I. Al cambiar a las coordenadas de Eddington-Finkelstein (ingoing y outgoing), extendemos el espacio-tiempo a las regiones II y III, respectivamente. La región que únicamente puede verse con las coordenadas de Kruskal-Szekeres es la región IV. Esta región es un espejo de la región I. En efecto, ambas regiones son isométricas y, por lo tanto, son físicamente idénticas. Para entender mejor este espacio-tiempo, podemos estudiar el diagrama de Penrose-Carter para las coordenadas de Kruskal-Szekeres.

Diagrama de Kruskal-Szekeres

Para obtener el diagrama de Penrose para las coordenadas de Kruskal-Szekeres hemos de considerar las coordenadas nulas ingoing y outgoing, (U, V) , de forma que la métrica se puede escribir como

$$g = -\frac{16G^3M^3}{r}e^{-\frac{r}{2GM}}(dUdV + dVdU) + r^2g_S(\theta, \phi)$$

Entonces, debemos definir unas coordenadas que nos acerquen el infinito, tal y como ya vimos anteriormente:

$$U = \tan(\tilde{U}) \implies dU = \frac{d\tilde{U}}{\cos^2(\tilde{U})}$$

$$V = \tan(\tilde{V}) \implies dV = \frac{d\tilde{V}}{\cos^2(\tilde{V})}$$

pudiendo expresar entonces la métrica como:

$$\begin{aligned} g &= -\frac{16G^3M^3}{r}e^{-\frac{r}{2GM}}(\cos^{-2}(\tilde{U})d\tilde{U}\cos^{-2}(\tilde{V})d\tilde{V} + \cos^{-2}(\tilde{V})d\tilde{V}\cos^{-2}(\tilde{U})d\tilde{U}) + r^2g_S(\theta, \phi) = \\ &= \cos^{-2}(\tilde{U})\cos^{-2}(\tilde{V})\left(-\frac{16G^3M^3}{r}e^{-\frac{r}{2GM}}(d\tilde{U}d\tilde{V} + d\tilde{V}d\tilde{U}) + \cos^2(\tilde{U})\cos^2(\tilde{V})r^2g_S(\theta, \phi)\right) \end{aligned}$$

Así, podemos realizar la transformación conforme usual, obteniendo una métrica que es conformemente equivalente:

$$\tilde{g} = (\cos^2(\tilde{U})\cos^2(\tilde{V}))g = -\frac{16G^3M^3}{r}e^{-\frac{r}{2GM}}(d\tilde{U}d\tilde{V} + d\tilde{V}d\tilde{U}) + r^2g_S(\theta, \phi)$$

Con estas coordenadas tenemos que la singularidad de curvatura $UV = 1$ ahora corresponde:

$$\tan(\tilde{U})\tan(\tilde{V}) = 1 \iff \sin(\tilde{U})\sin(\tilde{V}) = \cos(\tilde{U})\cos(\tilde{V}) \iff \cos(\tilde{U} + \tilde{V}) = 0$$

cuyos valores dan la solución $\tilde{U} + \tilde{V} = \pm\pi/2$. Con estas coordenadas, podemos obtener el diagrama de Kruskal: En este diagrama, podemos observar que las geodésicas nulas radiales (líneas

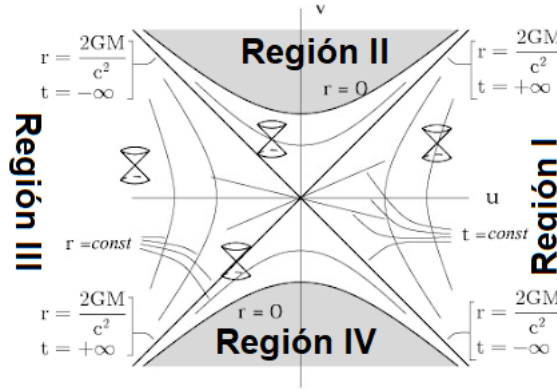


Figura 18: Diagrama de Penrose-Carter para el espacio-tiempo de Schwarzschild con las coordenadas de Kruskal-Szekeres

de universo de los rayos de luz que se muevan en dirección radial) están dibujadas a 45° , pues corresponde a $dX = \pm dT$ de las coordenadas de Kruskal-Szekeres. De esta forma, los conos de luz para cada punto son los mismos que en el caso de Minkowski.

Los horizontes de sucesos que delimitan el agujero negro y las regiones interiores del agujero blanco también son un par de líneas rectas a 45° . Este hecho refleja que un rayo de luz emitido en el horizonte de sucesos en dirección radial (dirigido hacia afuera en el caso del agujero negro o bien hacia adentro en el caso del agujero blanco) permanecería en el horizonte para siempre. Por lo tanto, los dos horizontes de agujeros negros coinciden con las generatrices del cono de luz orientado hacia el futuro para un evento en el centro del diagrama, mientras que los dos horizontes de agujeros blancos coinciden con las del cono de luz orientado hacia el pasado de este mismo evento. Además, cualquier evento que esté en el interior del agujero negro tendrá un cono de luz orientado hacia el futuro que permanecerá en esta región. Así, cualquier línea de universo dentro del cono de luz orientado hacia el futuro de dicho evento acabará en la singularidad del agujero negro. Esto se representa como una hipérbola limitada por los dos horizontes del agujero negro. Por el contrario, cualquier evento dentro de la región interior del agujero blanco tendrá un cono de luz pasado que permanece en esta región. De este modo, cualquier línea de universo de dentro del cono de luz orientado hacia el pasado debe haberse originado en la singularidad del agujero blanco. En este caso, se representa por una hipérbola limitada

por los dos horizontes del agujero blanco.

Con este diagrama también podemos estudiar cómo son las curvas de la coordenada constante en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Las curvas de coordenada r constante en las coordenadas de Schwarzschild siempre se parecen como hipérbolas delimitadas por un par de horizontes de sucesos a 45 grados, mientras que las curvas con coordenada t constante en las coordenadas de Schwarzschild siempre se ven como líneas rectas que pasan por el centro del diagrama con diferente pendiente. El horizonte de sucesos del agujero negro que limita con la región exterior coincidiría con una coordenada $t \rightarrow +\infty$ de Schwarzschild mientras que el horizonte de eventos del agujero blanco que limita con esta región coincidiría con una coordenada $t \rightarrow -\infty$ de Schwarzschild. Este hecho refleja que en las coordenadas ingoing de Schwarzschild la partícula tarda un tiempo infinito para alcanzar el horizonte (es decir, la distancia de la partícula desde el horizonte se aproxima a cero cuando la coordenada t de Schwarzschild se acerca al infinito), y una partícula que se aleja del horizonte, para cruzar a través de él, debe haber pasado un tiempo de coordenadas infinito en el pasado.

Para terminar esta sección sobre el agujero negro de Schwarzschild, podemos reflexionar sobre el hecho de que, a priori, no existe una restricción por la que M tenga que ser positiva. En realidad, podemos considerar el caso en el que $M < 0$, sin tener en cuenta el significado físico de este hecho. De esta forma, el término $(1 - \frac{2M}{r}) = (1 + \frac{2|M|}{r})$ sería siempre positivo y, por lo tanto, no existiría singularidad en la métrica excepto para el caso en que $r = 0$. En este caso, podemos hacer el mismo estudio del diagrama de Penrose que para el caso $M > 0$ y obtendríamos: En

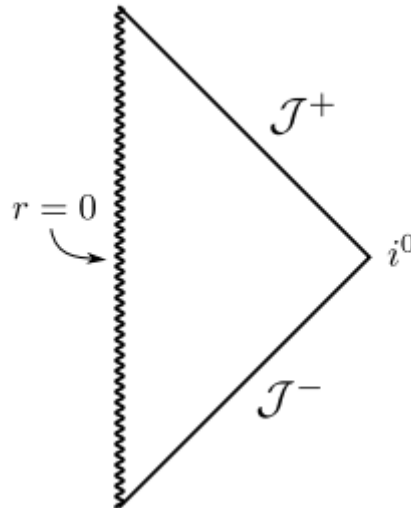


Figura 19: Diagrama de Penrose para un agujero negro de masa negativa [Fuente: [23]]

este caso, podemos ver que esta singularidad es diferente a la del agujero negro, puesto puede ser observada desde \mathcal{J}^+ mientras que para el agujero negro la singularidad está oculta más allá del horizonte de sucesos $r = r_s$. Este tipo de singularidad se suele denominar *singularidad desnuda*.

5.3 No hair theorem: la solución de Kerr-Newman

En la sección anterior hemos estudiado la estructura del espacio-tiempo de Schwarzschild, que permite describir el campo gravitacional generado fuera de una masa esférica. Vimos que un agujero negro de Schwarzschild se puede describir con una extensión de la métrica y está determinado por su masa. Sin embargo, podemos preguntarnos si es posible determinar un agujero negro por otras magnitudes, como podría ser la carga eléctrica, la velocidad, el momento magnético, etc. El **No-hair theorem** (*teorema de no pelo en castellano*) nos permite encontrar respuesta a esta pregunta. Aunque aun no se ha encontrado una demostración rigurosa del enunciado de este teorema, por lo que deberíamos hablar de conjetura, hay resultados experimentales hallados por el LIGO que aportan evidencia experimental a este teorema. Por tanto, podemos postular el teorema como:

Teorema 5.1. *Todas las soluciones de agujero negro de las ecuaciones de Einstein-Maxwell de la gravitación y el electromagnetismo en la teoría de la Relatividad General pueden ser caracterizadas por solo tres parámetros observables de manera externa: su masa M , su carga Q y su momento angular J .*

El principal resultado de este teorema es que cualquier información sobre la materia que provocó el agujero negro o que cae dentro de él desaparece y solo permanece la información relacionada con la masa, la carga y/o el momento angular. Así, tenemos que cualquier agujero negro estable puede ser completamente descrito por once variables: la distribución de **masa-energía**, M ; el **momento lineal**, \mathbf{P} ; el **momento angular**, \mathbf{J} ; la **posición** en el espacio-tiempo, \mathbf{X} ; y la carga eléctrica, Q . Sin embargo, es posible encontrar un sistema de referencia tal que la posición y el momento lineal sean cero. Además, se puede orientar el momento angular a lo largo del eje Z , por lo que solo tendríamos componente Z . De esta forma, podríamos pasar de once magnitudes a tan solo 3, tal y como dice el teorema: la masa, la carga eléctrica y la magnitud del momento angular.

Por lo tanto, la solución de Schwarzschild es de gran utilidad teórica ya que, además de su sencillez, nos permite introducir conceptos muy relevantes sobre los agujeros negros. Sin embargo, no es una solución físicamente realista, ya que un objeto estático cuya única magnitud es la masa no sería un buen modelo de agujero negro según nos indica el “no hair-theorem”. Consecuentemente, necesitamos encontrar una métrica más sofisticada con la que describir el espacio-tiempo generado por objetos en rotación que presentan masa y carga. Dicha solución se conoce comúnmente como **agujero negro de Kerr-Newman**.

Solución de Kerr-Newman

La métrica de Kerr-Newman es la solución más general de un espacio-tiempo asintóticamente plano y estacionario de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en la Relatividad General. Esta solución permite describir la geometría del espacio-tiempo en una región donde existe una pequeña masa M cargada con carga Q y que se encuentra rotando con un momento angular $J = Ma$, donde a representa el momento angular por unidad de masa.

Antes de exponer la solución de la métrica de Kerr-Newman, veamos qué aspecto tienen las **ecuaciones de Einstein-Maxwell**. Esta ecuación permite estudiar una región en presencia tanto de un campo gravitatorio como de un campo eléctrico. En tal caso, podemos definir la *acción de Einstein-Maxwell* que permite estudiar la gravedad junto al campo electromagnético:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x$$

donde el tensor $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, siendo A_μ el (*cuadri*-)potencial electromagnético. La constante de normalización es tal que permite que la fuerza de Coulomb entre dos cargas Q_1, Q_2 separadas por una distancia r viene dada por $G \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}$.

A partir de esta acción, se pueden obtener las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 2(F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_\sigma F^\sigma)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Con estas ecuaciones y haciendo uso de las *coordenadas de Boyer-Lindquist*, (t, r, θ, ϕ) , para las que el agujero negro rota sobre el eje polar, tenemos que la métrica solución se puede expresar como

$$g = -\left(\frac{\nabla - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\nabla} dr^2 - 2 \frac{a \sin^2(\theta)}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \nabla) dt d\phi + \Sigma d\theta^2 + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \nabla a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma}\right) \sin^2(\theta) d\phi^2$$

donde hemos definido $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$ y $\nabla = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$.

Observación. En lo que queda de capítulo, fijaremos $G = 1$ y usaremos coordenadas geometrizadas también para G (recordemos que en todo el trabajo estamos suponiendo $c = 1$).

Además, con esta notación tenemos que las componentes del potencial electromagnético vienen dadas por:

$$A_t = \frac{Qr}{\Sigma}, \quad A_\phi = -\frac{Qar \sin(\theta)}{\Sigma}, \quad A_r = A_\theta = 0$$

No podemos decir que esta solución sea esféricamente simétrica, pero sí que presenta simetría para $\phi \rightarrow -\phi$.

Podríamos preguntarnos si existe algún teorema análogo al teorema de Birkhoff para este tipo de solución. La respuesta es negativa, pues al presentar rotación no podemos pensar las cosas como en el caso esféricamente simétrico.

Para investigar la estructura de un agujero negro más simple pero que nos permita obtener resultados, consideraremos los casos en los que $J = 0$ y $Q = 0$, que corresponderían a los agujeros negros de *Reissner-Nordström* y *Kerr*, respectivamente.

Solución de Reissner-Nordström

Si en la solución anterior consideramos el caso límite en el que $J = 0$, es decir, el agujero negro no presenta rotación, obtenemos la conocida como ***solución de Reissner-Nordström***. Esta solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell anteriormente descritas permite estudiar un agujero negro de masa M y carga Q . De esta forma, se puede demostrar que la ecuación admite la siguiente ecuación esféricamente simétrica:

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

que como puede verse no es más que el caso concreto en que $J = 0$ para la solución de Kerr-Newman. En este caso el potencial electromagnético únicamente tiene componente temporal $A_t = \frac{Q}{r}$. En este caso, sí que existe el teorema análogo al de Birkoff y podemos decir que la solución de Reissner-Nordström es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein-Maxwell.

Usando la misma notación que en la métrica anterior, podemos definir $\nabla = Q^2 - 2Mr + r^2 = (r - r_+)(r - r_-)$ tal que $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. Por lo tanto, en función de los valores de Q, M tenemos tres casos diferentes: $Q > M$, $Q = M$ y $Q < M$.

Super-extremal RN: $Q > M$

En el caso en que $Q > M$, el factor ∇ no tiene raíces reales por lo que la métrica es regular para todo valor $r > 0$. En este caso, la única singularidad sería $r = 0$ y sería una situación análoga a la del agujero negro de masa negativa. Esta solución presentaría, por tanto, el mismo diagrama de Penrose que el de $M < 0$.

Extremal RN: $Q = M$

Si consideramos el caso en que la masa y la carga son iguales, el término ∇ presentaría una solución doble $r = r_+ = r_- = M$. En este caso, la solución de la métrica vendría dada por:

$$g = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

por lo que es fácil ver de que dicha métrica presentará una singularidad para el valor $r = M$. Procediendo análogamente que con la métrica de Schwarzschild, podemos definir la *coordenada de Tortoise* de forma que:

$$dr^* = \left(1 - \frac{M}{r}\right) dr$$

Así, la métrica tomaría la forma:

$$g = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 (dt^2 - (dr^*)^2) + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

Si cambiamos de nuevo y consideramos las *coordenadas ingoing de Eddington-Finkelstein*, (v, r, θ, ϕ) con $v = t + r^*$, obtenemos la métrica:

$$g = -(1 - \frac{M}{r})dv^2 + 2dvdr + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

en la que la aparente singularidad $r = M$ desaparece y únicamente permanece $r = 0$.

Sub-extremal RN: $Q < M$

Para estos posibles valores de Q y M tenemos dos soluciones reales $r_+ > r_-$ para el término ∇ , por lo que tenemos dos singularidades de las coordenadas. Análogamente al caso anterior, podemos quitar dichas singularidades considerando un sistema de coordenadas adecuado:

$$\frac{\nabla}{r^2}(dr^*)^2 = \frac{r^2}{\nabla}dr^2 \iff g = -\frac{\nabla}{r^2}(dt^2 - (dr^*)^2) + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

Es posible encontrar una solución para la coordenada r^* mediante integración y obtenemos:

$$r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \log\left(\frac{r - r_+}{r}\right) + \frac{1}{2\kappa_-} \log\left(\frac{r - r_-}{r}\right)$$

donde hemos definido los valores $\kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} > 0$ y $\kappa_- = \frac{r_- - r_+}{2r_-^2} < 0$. Ahora, definiendo las coordenadas de Eddington-Finkelstein, $u = t - r^*$ y $v = t + r^*$, podemos tomar las coordenadas (v, r, θ, ϕ) para las que la métrica se expresa

$$g = -\frac{\nabla}{r^2}dr^2 + drdv + r^2 g_S(\theta, \phi)$$

Como podemos ver, para estas coordenadas la métrica no presenta singularidad. Nuevamente, las singularidades $r = r_{\pm}$ son singularidades asociadas a la métrica y la única singularidad física real es $r = 0$. Para estudiar qué es lo que ocurre para $r = r_{\pm}$, tal y como hicimos en el caso de $r = r_s$, podemos recurrir a coordenadas del tipo Kruskal. En este caso, las nuevas coordenadas serían:

$$U^{\pm} = -e^{-\kappa_{\pm}u}$$

$$V^{\pm} = e^{\kappa_{\pm}v}$$

Con estas extensión se puede demostrar, aunque no lo haremos debido a que no es este el objetivo del trabajo, que el diagrama de Penrose que permite estudiar la causalidad de este espacio-tiempo es el siguiente: Ahora pasaremos a estudiar la solución general de Kerr-Newman

Figura 20: Diagrama de Penrose para la solución sub-extremal de Reissner-Nordström [Fuente: [9]]

para el caso concreto en que la carga $Q = 0$, que se conoce simplemente como agujero de Kerr. Esta solución representa una solución de un agujero negro que rota alrededor de un eje. Esto permitiría describir el fenómeno de materia girando durante el colapso gravitatorio.

Solución de Kerr

Todas las soluciones que hemos estudiado más en detalle hasta ahora, Schwarzschild y Reissner-Nordström, son soluciones que presentaban simetría esférica. La solución de Kerr es un caso concreto de la solución de Kerr-Newman en la que la carga se considera nula y no se tiene en cuenta el efecto electromagnético. Por lo tanto, tal y como adelantamos al introducir esta última solución, al existir un momento angular, el espacio-tiempo deja de ser simétrico y no es válido el teorema de Birkhoff.

Si fijamos $Q = 0$, tenemos que la expresión de la métrica se simplifica y queda

$$g = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4aMr\sin^2(\theta)}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\nabla}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr\sin^2(\theta)}{\Sigma}\right)\sin^2(\theta)d\phi^2$$

donde ahora las variables Σ, ∇ toman los valores $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2(\theta)$, $\nabla = r^2 - 2Mr + a^2$. Recordemos que $a = J/M$ es el parámetro que describe la rapidez relativa de la rotación.

Podemos ver fácilmente que, en este caso, la singularidad vendrá dada por los valores:

$$\nabla = 0 \iff r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

$$\Sigma = 0 \iff r = 0, \cos(\theta) = 0 \iff r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, vemos que aparentemente tenemos tres singularidades, $r = r_{\pm}$, que como veremos más adelante son singularidades asociadas a la métrica y $r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$. A diferencia que en los ejemplos anteriores, ahora la singularidad asociada a la curvatura del espacio-tiempo no es el valor $r = 0$. Por el contrario, en este caso el ángulo θ ha de valer $\pi/2$, por lo que únicamente habrá singularidad cuando nos acerquemos al valor $r = 0$ a lo largo del ecuador.

Análogamente al caso de Reissner-Nordström, existen tres casos a considerar $M < a$, $M = a$ y $M > a$, recibiendo el mismo nombre que en el caso anterior: sobre-extremal, extremal y sub-extremal, respectivamente. Nosotros nos centraremos en el estudio de la solución para $M > a$, pues es el que presenta resultados físicos relevantes. Por lo tanto, si fijamos $M > a$, tal y como hemos visto tendremos dos singularidades asociadas a la métrica y una a la curvatura. Es posible lidiar con las singularidades de la métrica realizando un cambio de coordenadas, que comúnmente reciben el nombre de **ingoing Kerr coordinates**. :

$$(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (v, r, \theta, \chi)$$

donde tomamos la definición habitual para $v = t + r^*$ para $dr^* = \frac{r^2+a^2}{\nabla}dr$ y definimos χ tal que $d\chi = d\phi + \frac{a}{\nabla}dr$. Esta nueva coordenada χ permite recoger situaciones físicas relevantes. Si pensamos qué implica el hecho $\chi = \text{const.}$, podemos ver por la definición que claramente no corresponde a $\phi = \text{const.}$. Para entender mejor en qué consiste, podemos pensar qué significa $\chi = \text{const.}$ cuando una partícula se precipita ($dr < 0$). En este caso, ϕ no es constante, sino que necesita rotar de forma que $d\phi = -\frac{a}{\nabla}dr$. Por tanto, el observador cae a $r = 0$ en el plano ecuatorial rotando a lo largo del eje polar.

Si queremos expresar la métrica en estas nuevas coordenadas, tenemos que:

$$\begin{aligned}
dt = dv - dr^* &\implies dt^2 = (dv - dr^*)(dv - dr^*) = dv^2 + (dr^*)^2 - dvdr^* - dr^*dv = \\
&= dv^2 + \left(\frac{r^2 + a^2}{\nabla}\right)^2 dr^2 - \frac{r^2 + a^2}{\nabla} dvdr - \frac{r^2 + a^2}{\nabla} drdv \\
d\phi = d\chi - \frac{a}{\nabla} dr &\implies d\phi^2 = (d\chi - \frac{a}{\nabla} dr)(d\chi - \frac{a}{\nabla} dr) = d\chi^2 + \frac{a^2}{\nabla^2} dr^2 - \frac{a}{\nabla} d\chi dr - \frac{a}{\nabla} dr d\chi
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la métrica:

$$\begin{aligned}
g = &-(1 - \frac{2Mr}{\Sigma})(dv^2 + \left(\frac{r^2 + a^2}{\nabla}\right)^2 dr^2 - \frac{r^2 + a^2}{\nabla} dvdr - \frac{r^2 + a^2}{\nabla} drdv) - \\
&-\frac{4aMr\sin^2(\theta)}{\Sigma}(dv - \frac{r^2 + a^2}{\nabla} dr)(d\chi - \frac{a}{\nabla} dr) + \frac{\Sigma}{\nabla} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \\
&+(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr\sin^2(\theta)}{\Sigma})\sin^2(\theta)(d\chi^2 + \frac{a^2}{\nabla^2} dr^2 - \frac{a}{\nabla} d\chi dr - \frac{a}{\nabla} dr d\chi)
\end{aligned}$$

operando todos los productos de esta expresión y simplificando lo necesario, obtenemos que la expresión de la métrica en las coordenadas ingoing de Kerr se expresa:

$$\begin{aligned}
g = &-(\frac{\nabla - a^2\sin^2(\theta)}{\Sigma})dv^2 + 2dvdr - 2\frac{a\sin^2(\theta)}{\Sigma}(r^2 + a^2 - \nabla)dvd\chi \\
&-2a\sin^2(\theta)d\chi dr + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \nabla a^2\sin^2(\theta)}{\Sigma}\sin^2(\theta)d\chi^2 + \Sigma d\theta^2
\end{aligned}$$

Así, puede verse fácilmente que las anteriores singularidades de la métrica, $r = r_{\pm}$ han sido resueltas, pues ∇ no aparece más en el denominador. Sin embargo, la singularidad asociada a $\Sigma = 0$ sigue permaneciendo.

Si quisiéramos estudiar el diagrama de Penrose, tendríamos que tener en cuenta que es muy diferente acercarse a $r = 0$ por $\pi/2$ que por el ecuador $\theta = \pi/2$. En el primer caso encontraríamos que no existe singularidad mientras que para el segundo caso $r = 0$ sería una singularidad de la curvatura del espacio-tiempo. Por lo tanto, el diagrama de Penrose total debería recoger la unión de ambos. Se podría estudiar ambos diagramas para los valores $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ efectuando como hemos hecho hasta ahora el cambio de coordenadas a las del tipo Kruskal. Si se realiza el estudio completo, se obtiene el siguiente diagrama: Una vez visto esto sobre los agujeros negros de Kerr, podemos nombrar algunas diferencias destacables de este objeto físico:

1. Si llamamos a los valores $r = r_+$, $r = r_-$ horizontes de sucesos exterior e interior, respectivamente, tenemos una nueva frontera antes de llegar al horizonte r_+ en la que la coordenada radial r pasa a ser de tipo tiempo: el *horizonte de Killing*. La región que se encuentra entre estos dos últimos horizontes se suele denominar **hergoesfera**. Esta zona es muy peculiar: la hergoesfera delimita una zona en la que los observadores no pueden permanecer estáticos: sus sistemas de referencia son irremediamente arrastrados por la rotación del espacio-tiempo. Sin embargo, esta zona es intermedia entre el exterior y el

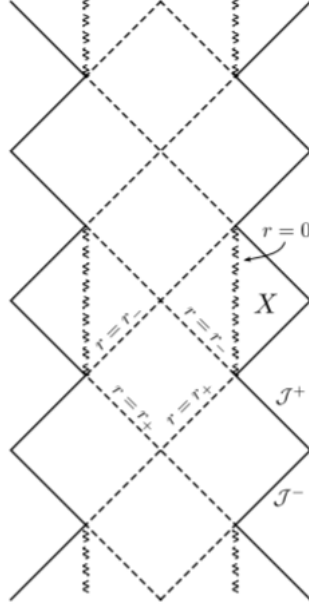


Figura 21: Diagrama de Penrose para el sub-extremal agujero negro de Kerr [Fuente: [22]]

horizonte de sucesos, por lo que los observadores pueden permanecer o salir de esta zona, sin caer necesariamente hacia la singularidad. De hecho, una partícula que entre y salga de esta zona puede extraer energía del agujero negro en rotación. Esta extracción se hace posible debido a que la energía rotacional de un agujero negro no está localizada dentro del horizonte de sucesos, sino que se encuentra en la ergosfera. Este proceso teórico se denomina **proceso de Penrose**.

2. La singularidad central $r = 0, \theta = \pi/2$ no está concentrada en un punto como en los casos que hemos estudiado anteriormente. El motivo por el que solo aparece una singularidad para una dirección de θ es porque dicha singularidad tiene la forma topológica de un {anillo. De hecho, si fijamos las coordenadas v, r, θ , la métrica con las coordenadas ingoing de Kerr quedaría

$$g = \frac{(r^2 + a^2)^2 - \sin^2(\theta)(r^2 - 2Mr + a^2)a^2}{a^2 \cos^2(\theta)} \sin^2(\theta) d\chi^2$$

y si tomamos límite cuando $r \rightarrow 0$ para $\theta = \pi/2$ tenemos que $g \rightarrow a^2 d\chi^2$. Efectivamente esta es la métrica de un anillo de radio a . Por lo tanto, si te acercas a $r = 0$ con otra dirección del ángulo θ no encontrarás la singularidad, pero caerá en el interior del anillo y aparecerás en una una región del espacio-tiempo.

3. Recordando un concepto sobre causalidad que vimos en el capítulo 3, las *curvas temporales cerradas*, es posible encontrar este tipo de curvas “anómalas” dentro del espacio-tiempo que da esta solución. Si fijamos el valor de t y consideramos los valores $\theta = \pi/2$ y $r < 0$,

tenemos que la métrica se puede expresar como

$$g = (r^2 + a^2 + \frac{2Ma}{r})d\chi^2$$

Si nos acercamos mucho a la singularidad de forma que $r < 0$ y $|r| < \frac{2Ma}{r^2+a^2}$, entonces tenemos que la curva sería temporal. Como, además, la coordenada χ es 2π -periódica, tenemos que la curva es, en efecto, una curva temporal cerrada (CTC).

5.4 Superficies atrapadas

Para acabar este capítulo veremos brevemente una definición alternativa de agujeros negros. La definición que expusimos en el comienzo de este capítulo, se basaba en la existencia del horizonte de sucesos. Sin embargo, hasta que no somos capaces de estudiar qué ocurre en el infinito no podemos identificar el horizonte de sucesos, puesto que no puede ser observado. Para conocer lo que ocurre en el infinito hemos de recurrir al diagrama de Penrose-Carter que, como hemos visto, supone que trabajamos con variedades que pueden tener frontera. Por eso, se hace necesario una definición alternativa de agujero negro y es aquí donde entran en juego las superficies atrapadas.

Para exponer la noción de superficie atrapada, trabajaremos con las subvariedades espaciales de co-dimensión 2, Σ , de un espacio-tiempo (M, g) . De esta forma, cada espacio normal de la subvariedad $T_p\Sigma$, $p \in \Sigma$ tiene dimensión 2 y podemos considerar dos direcciones nulas orientadas hacia el futuro que sean ortogonales a Σ . Llamemos a estas direcciones l_{\pm} , a las que podemos asociar su segunda forma fundamental nula, \mathcal{K}_{\pm} , definidas

$$\mathcal{K}_{\pm} : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{K}_{\pm}(X, Y) = g(\nabla_X l_{\pm}, Y)$$

Si recordamos las definiciones que vimos en el capítulo 4, podemos definir asociadas a estas formas fundamentales las *curvaturas medias nulas*, $\theta_{\pm} = \text{Tr}_{\bar{g}}(\mathcal{W}_{\pm})$ realizando la traza respecto la métrica inducida, \bar{g} . Físicamente, estas magnitudes miden la divergencia que presentan los rayos de luz outgoing, en el caso de θ_+ , o bien ingoing, para θ_- , que salen perpendiculares a Σ . Con estas definiciones tenemos que:

Definición 5.4.1. Diremos que Σ es una subvariedad atrapada si y solo si ambas curvaturas medias nulas verifican $\theta_{\pm} < 0$ o bien $\theta_p m > 0$. En el primer caso diremos que está atrapada en el futuro, mientras que en el segundo en el pasado.

Una vez definido lo que es una superficie atrapada, veamos para qué son útiles. Según los resultados de los teoremas de Penrose y Hawking, las condiciones físicas de una superficie atrapada conduce a obtener regiones del espacio-tiempos geodésicamente incompletos. Por lo tanto, se puede predecir la singularidad en el futuro de una superficie atrapada. El resultado se recoge en el siguiente teorema:

Teorema 5.2. *La presencia de una superficie atrapada en una región del espacio-tiempo indica que un agujero negro se ha formado en las proximidades de dicha región, aunque la evolución exacta del espacio-tiempo es desconocida.*

con el que terminamos el análisis de los agujeros negros.

6. Conclusión

El objetivo principal de este trabajo es definir las herramientas matemáticas y comprender los principios físicos sobre los que se desarrolla la teoría de la Relatividad General. Para ello, se ha desarrollado la teoría sobre geometría semi-riemanniana, un tipo de geometría con propiedades muy curiosas, que no ha sido abordada en ninguna asignatura del grado. La comprensión de este tipo de geometría y su relación con la teoría física ha sido uno de los puntos principales de trabajo.

El estudio de este tipo de geometría es el que nos ha permitido guiarnos en el desarrollo de la teoría de los agujeros negros, para poder conocer su relevancia y su utilidad. De esta forma, hemos podido estudiar diferentes métricas del espacio-tiempo en las que aparecen agujeros negros. Desde la más sencilla pero muy importante conceptualmente, en la que solo interviene la masa, M , del agujero negro (*métrica de Schwarzschild*) hasta la más completa, en la que intervienen las tres magnitudes posibles según el “No hair theorem”, la masa, M ; la carga, Q ; y el momento angular, J (*métrica de Kerr-Newman*). Sin embargo, en todo el desarrollo de las soluciones a las ecuaciones de Einstein hemos considerado que la constante cosmológica, Λ , de la que hablamos en el capítulo 3 es nula.

La constante cosmológica fue introducida por Einstein en 1917 para lograr un universo estático. Sus ecuaciones originales de 1915 no permitían un universo estático: la gravedad lleva a un universo inicialmente en equilibrio dinámico a contraerse. Sin embargo, después de desarrollar su solución estática, Edwin Hubble sugirió en 1929 que el universo parecía estar en expansión. Esto era perfectamente consistente con las soluciones a las ecuaciones originales.

Por lo tanto, un análisis que ha quedado fuera de nuestro estudio es el efecto de dicha constante cosmológica en el espacio-tiempo. Para ello, se define lo que se conoce como *universo de Sitter*. Este universo no es más que otra solución de las ecuaciones de Einstein en la que únicamente se considera el efecto de la constante cosmológica. De esta forma, la dinámica del universo está dominada por dicha constante, que se piensa que está relacionada con la energía oscura del universo o la inflación cósmica en el universo temprano.

Además de este tipo de soluciones, existen otras soluciones de las ecuaciones de Einstein que presentan también simetría esférica y son de gran importancia, como es el caso de la *métrica de Vaidya*, que describe el espacio-tiempo no vacío del exterior de una estrella no giratoria y con simetría esférica que emite o absorbe radiación.

El análisis de todas estas otras soluciones de gran relevancia y la comprensión tanto de la mecánica de los agujeros negros como de las ondas gravitacionales son los siguientes pasos a desarrollar en la línea de trabajo de nuestro proyecto.

Referencias

- [1] M. J. R. T. Abraham, Ralph, “Manifolds, tensor analysis, and applications,” 1988.
- [2] S. Ansoldi, “Chapter 8: General relativity (notes),” in *Universita di Trieste, Dipartimento di Fisica*, 2016.
- [3] K. D. Aurel Bejancu, “Lightlike submanifolds of semi-riemannian manifolds,” 1995.
- [4] C. Barrabès, “Singular hypersurfaces in general relativity: a unified description,” in *Observatoire de Paris*, 1988.
- [5] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” 1997.
- [6] G. Compère, “An introduction to the mechanics of black holes,” in *Physique Théorique et Mathématique*, 2006.
- [7] M. G. Cyriaque Atindogbe and R. Hounnonkpe, “New properties on normalized null hypersurfaces,” 2018.
- [8] R. d’Inverno, “Introducing einstein’s relativity,” 1992.
- [9] F. Dowker, “Black holes, msc in quantum fields and fundamental forces,” 2015.
- [10] E. Felinska, “Carter-penrose diagrams and black holes,” 2010.
- [11] P. G. Frè, “Gravity, a geometrical course,” in *Volume 2: Black Holes, Cosmology and Introduction to supergravity*, 2013.
- [12] G. J. Galloway, “Notes on lorentzian causality,” in *University of Miami*, 2014.
- [13] J. A. P. González, “Geometría de riemann,” in *Universidad de Murcia*, 2006.
- [14] X. Gràcia, “Apunts de teoria de varietats diferencials,” in *Facultat de Matemàtiques i Estadística*, 2015.
- [15] —, “Exemples i resultats de varietats diferencials,” in *Facultat de Matemàtiques i Estadística*, 2015.
- [16] <https://en.wikipedia.org>, 2001-2019.
- [17] D. N. Kupeli, “On null submanifolds in spacetimes,” 1987.
- [18] J. M. Lee, “Introduction to smooth manifolds,” 2000.
- [19] V. L. C. Luis J. Alías and M. Rigoli, “Trapped submanifolds contained into a null hypersurface of de sitter spacetime,” 2018.
- [20] J. Margalef, “Towards general relativity through parametrized theories,” 2019.

- [21] C. W. Misner, “Gravitation,” 1970.
- [22] J. A. G. Montero, “El agujero negro de kerr,” in *Universidad de Granada*, 2017.
- [23] J. M. P. Poyatos, “Estudio comparativo de diferentes tipos de agujeros negros,” in *Universidad de Granada*, 2016.
- [24] B. Requejo, “Apuntes de geometría diferencial,” in *Universidad de Extremadura*, 2017.
- [25] E. Robson, “Null hypersurfaces in general relativity theory,” 1973.
- [26] N. R. Roy, “Relatividad general: Complementos matemáticos. formulación minkowskiana de la re. fundamentos y ecuaciones de la rg,” in *Universitat Politècnica de Catalunya*, 2018.
- [27] S. R. Soto, “Transporte paralelo,” in *Universidad de Cantabria*, 2015.
- [28] A. M. TÉLLEZ, “<http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com>,” 2009.
- [29] C. University, “Lecture notes on general relativity,” 2013.
- [30] R. M. Wald, “Black holes and thermodynamics,” in *University of Chicago Press*, 2001.
- [31] www.abc.es/ciencia/ciencia.asp, 2019.